柯斯特利金 P128

5. 证明：取 $b=e$ 则 $ax=e$ 和 $ya=e$ 有唯一解

$$x=(ya)x=y(ax)=y$$

∴ $ax=xa=e$ ∴ $x=a^{-1}$ 每个元素有逆，群.

7. $AB=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $(AB)^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

假设 $(AB)^k=\begin{pmatrix}(-1)^k & (-1)^k\cdot k\\ 0 & (-1)^k\end{pmatrix}$

则 $(AB)^{k+1}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^k & (-1)^k k\\ 0 & (-1)^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^{k+1} & (-1)^{k+1}\cdot(k+1)\\ 0 & (-1)^{k+1}\end{pmatrix}$

∴ AB 是无限阶循环元 $\langle AB\rangle$ 是无限阶循环子群.

在阿贝尔群中不成立. 若 $A^n=e$ $B^m=e$ 则 $(AB)^{mn}=A^{mn}\cdot B^{mn}=e^m\cdot e^n=e$

有限阶

8. 证明：假设 G 中没有二阶元. 则 $\forall g\in G$. $g\neq g^{-1}$ ∴ g 与 g^{-1} 成对出现且相互唯一. 而 $1\in G$.

故 G 的阶一定是奇数，矛盾. ∴ G 中一定存在二阶元.

19. 略

席南华 P99

3. 证明：① 运算：显然 {八字母串} × {八字母串} → {八字母串}

② 结合律 $A=a_1a_2\cdots a_8$ $B=b_1b_2\cdots b_8$ $C=c_1c_2\cdots c_8$ 则

$$(AB)C=a_1a_2\cdots a_5b_6b_7b_8C=a_1a_2\cdots a_5c_6c_7c_8=A(BC)$$

16. 证明：设 $a^m=e$ $b^n=e$ 则 m,n 互素 ∵ a,b 交换 ∴ $(ab)^{mn}=a^{mn}b^{mn}=e^ne^m=e$

∴ $\mathrm{ord}(ab)\mid mn$ ~~又∵ m,n 互素~~ 设 $\mathrm{ord}(ab)=d$. 则

$(ab)^d=a^db^d=e$ ∴ $m\mid d$ $n\mid d$ 又∵ m,n 互素 ∴ $mn\mid d$ ∴ $mn=d$

29. 证明：由子群的阶整除群的阶，和 $4\nmid 6$ $5\nmid 6$ ∴ 6阶群中没有4阶元与5阶元.

① G有6阶元，则g是G中6阶元 $G=\langle g\rangle$，按同构只有一个6阶循环群.

② G有3阶元，由8题，$\mathrm{card}(G)=6$是偶数，一定存在二阶元 ∴设 $a^3=e$ $b^2=e$ 则

$6\mid \mathrm{card}(G)$，∨按同构只有 $\langle a,b\rangle$

③ 若G只有1阶元和2阶元，则$|G|$是2的幂次或∞，与$\mathrm{card}(G)=6$矛盾，故不存在.

- 定义3. 设G是一个群，X是一非空集合，如果给了一个映射$f: G\times X\to X$，适合条件：对所有的$g_1,g_2\in G$, $x\in X$,

1) $f(e,x)=x$ （也写作 $e(x)=x$）

2) $f(g_1g_2,x)=f(g_1,f(g_2,x))$; （也写作 $g_1g_2(x)=g_1(g_2(x))$）

那么我们就说，f决定了群G在集合X上的作用。

- 在集合X上定义等价关系"~"，对于$x,y\in X$，如果在G中有一个元素g使得 $y=g(x)$，那么就说 $x\sim y$.

1) $x\sim x$ 2) $x\sim y$，则 $\exists g(x)=y$ ∴ $g^{-1}(y)=x \Rightarrow y\sim x$ 3) $x\sim y$, $y\sim z$，则 $x\sim z$.

- 轨道：在上述等价关系下被分成的等价类。即 $O_x=\{g(x)\mid g\in G\}$ 是包含x的轨道.

轨道两两不相交 ∴ $X=\bigcup_x O_x$ 其中x取遍不同轨道的代表。$|X|=\sum_x|O_x|$ (x是代表)

轨道中可能包含单个元素 即 $O_x=\{x\}=\{g(x)\mid g\in G\}\Rightarrow \forall g\in G$, $g(x)=x$. 这样的x称为G的不动元素

- 稳定子群，对 $x\in X$，令 $H_x=\{g\in G\mid g(x)=x\}$，称为G的关于x的稳定子群.

（即所有将x作用到x本身的g）

① ∵ $e(x)=x$ ∴ $e\in H_x$ ② $\forall g_1,g_2\in H_x$, $g_1g_2^{-1}(x)=g_1(g_2^{-1}(x))=g_1(x)=x$

$$|O_x|=|G/H_x|=\frac{|G|}{|H_x|}$$

即∃一个一一对应 $\varphi: O_x\mapsto G/H_x$

其中G/H_x不是商群 表示所有H_x在G中的左陪集构成的集合$\{gH_x\mid g\in G\}$，称为群G的一个齐性空间