

第十二次习题课讲义.

① 上课程内容回顾

1. 环的定义以及几类特殊的环: 交换环, 一整环

无零因子环 $\rightarrow$ 除环

2. 子环的定义以及几类特殊的子环: $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{H}, \mathbb{Q}$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
 $\mathbb{H} \supset \mathbb{Q}$
 $M_2(\mathbb{C})$

3. 环同态, 环的特征

4. $\text{RLA} \subset M_n(\mathbb{R})$ 与 $U(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ 两类常用的子环与子群

5. 分式域, 域的定义以及域同态, 特征

6. 一般域上的线性代数

② 习题解答

③ 拓展内容

1. $\mathbb{H}$ 四元数的性质研究

2. * 如何计算 $U(\mathbb{R})$ 对于一些特殊的环, 如 $\mathbb{H}, \mathbb{R}, M_n(\mathbb{R})$

1. H 是我们接触的非交换环的例子
 定义有很多种, 老师采用的是看成 $M_2(C)$ 的子环

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in C \right\} \subset M_2(C)$$

而今天 我们介绍它的性质主要为以下两点

① H 可以看成实数域上 4 元代数

② H 上 Norm 为 1 的元素 的几何意义 (与算术意义)

首先一个域上的代数 A 是指 $\exists i, j, k \in A$ 满足 $A = F \oplus Fi \oplus Fj \oplus Fk$ 且 $i^2 = -1, j^2 = -1, ij = -ji = k$ (这里要求 $\text{char}(F) \neq 2$)
 也就是说 A 本身是一个环 又拥有类似 R 上向量空间的结构, 这种我们以后称为代数

接着我们来看 $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & \bar{F} \end{pmatrix}$ (也就是上述 A 的记号)

我们证明 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \bar{F} & \end{pmatrix} \cong M_2(F), \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \bar{F} & \end{pmatrix} \cong M_2(F), \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{F} & \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} ar^2 & bs^2 \\ \bar{F} & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \bar{R} & \end{pmatrix} \cong M_1$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & \end{pmatrix} \cong M_2(K)$ 这五个同构

那么什么叫做代数之间的同构呢?

很简单 $A \cong B$ 作为 F -代数同构 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists f: A \rightarrow B$ 环同构 且

$\exists f: A \rightarrow B$ 为 F -代数同态 且 f 为双射

$f(r a) = r f(a) \quad \forall r \in F, \forall a \in A$

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & \bar{i} \end{pmatrix} \cong M_2(F).$$

完整写下来即是

$$\begin{aligned} i &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ j &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ k &\longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 1 &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a+bi+cj+dk) \\ = \begin{pmatrix} a-d & b+c \\ b-c & a+d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{而} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{的原像为} \frac{a+d}{2} + \frac{b+c}{2}i + \frac{b-c}{2}j + \frac{d-a}{2}k.$$

$$\textcircled{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & \bar{i} \end{pmatrix} \cong M_2(\bar{F})$$

$$\begin{aligned} f(a+bi+cj+dk) \\ = \begin{pmatrix} b+d & a-c \\ a+c & b-d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{而} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{原像为} \frac{b+c}{2} + \frac{a+d}{2}i + \frac{c-b}{2}j + \frac{a-d}{2}k$$

$$\textcircled{3} \begin{pmatrix} a & b \\ i & \bar{i} \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ar^2 & bs^2 \\ i & \bar{i} \end{pmatrix}$$

$$f(a+bi+cj+dk)$$

$$= a+br^2i+cs^2j+dr^2sk$$

$$\text{而} a+bi+cj+dk \text{的原像为} a+br^{-1}i+cs^{-1}j+d(rs)^{-1}k$$

$$\begin{aligned} i &\longmapsto ri \\ j &\longmapsto sj \\ k &\longmapsto rsk \\ 1 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

④ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ R & \end{pmatrix}$ 与 $\mathbb{H}$ 的同构不太容易建立.

需要分析 $\mathbb{H} = R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \oplus R \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \oplus R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus R \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

而且 $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

那么 $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ R & \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$

$f(a+bi+cj+dk)$

$=$

$$\begin{aligned} i &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ j &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ k &\longmapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ 1 &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

为什么这是一个环同构需要验证!

从而我们给出了 $\mathbb{H}$ 的一个 $\mathbb{R}$ 上 4 元代数结构

也可以定义 Norm 映射 $\mathbb{H} \xrightarrow{\text{Norm}} \mathbb{R}$

$a+bi+cj+dk \longmapsto (a^2+b^2+c^2+d^2)$

或者 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \longmapsto |a|^2 + |b|^2$

不难验证 Norm 映射是一个群同态 (限制在 $\mathbb{H}^\times \rightarrow \mathbb{R}^\times$ 上).

即 $\text{Norm}(xy) = \text{Norm}(x) \text{Norm}(y)$

但是 $\text{Norm}(x+y) \neq \text{Norm}(x) + \text{Norm}(y)$

而 $\text{Norm}(x) = 1$ 的这些元素 都有很强的几何意义!

$$⑤ \begin{pmatrix} a & b \\ c & \end{pmatrix} \cong M_2(\mathbb{C})$$

这一系列涉及到四元代数的分类问题

它揭示了若 $F = \mathbb{C}$ 时，其上的 4 元代数仅 $M_2(\mathbb{C})$ 一种

而以后（不是线性代数）会揭示若 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & \end{pmatrix}$ 不是可逆环 那一定同构于 $M_2(F)$

$$\text{由于 } \begin{pmatrix} a & b \\ c & \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} ar^2 & bs^2 \\ c & \end{pmatrix}$$

而 $\mathbb{C}$ 中所有数均能开方 故 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & \end{pmatrix} \cong M_2(\mathbb{C})$ (取 $r^2 = a^{-1}, s^2 = b^{-1}$)

接下来介绍 H 中 $N_{\text{orm}}=1$ 的元素的意义

首先它同胚于 S^3 毋庸置疑，但我们今天要讲的是 S^3 在 S^7 上的作用如何（用 H 中 $N_{\text{orm}}=1$ 的元素来表现）

把 S^3 看成 H 中 $N_{\text{orm}}=1$ 的元素 由于 N_{orm} 保乘性 故这些元素构成一个群（相当于赋予了 S^3 一个群结构）

再把 S^7 看成 $H \times H$ 中 $N_{\text{orm}}=1$ 的元素（这个群不能看成群 因为无元素不可逆如 $(0, 1)$ ）

考察 S^3 在 S^7 上的作用 $g \cdot (a, b) = (ga, gb)$

再考察等价关系 $\sim$ 下的商集 $S^7/\sim$

$$\text{很容易说明它是 } HP^1 = \{[a:b] \mid a, b \in H, [a:b] = [\lambda a:\lambda b] \forall \lambda \in H\}$$

而它在 H 向上与 S^4 是同胚的 $\varphi: HP^1 \rightarrow S^4$

$$\varphi([a+bi+cj+dk; a'+b'i+c'j+d'k]) = \varphi([1; \frac{(a'+b'i+c'j+d'k)(a-bi-cj-dk)}{a^2+b^2+c^2+d^2}]) \text{ 若 } a, b, c, d \text{ 不全为 } 0$$

$$= \left(\frac{aa'+bb'+cc'+dd'}{a^2+b^2+c^2+d^2}, \frac{(ab'-a'b)+(dc-c'd)}{a^2+b^2+c^2+d^2}, \frac{(ca-a'c)+(b'd-a'b)}{a^2+b^2+c^2+d^2}, \frac{(da-ad)+(c'b-cb')}{a^2+b^2+c^2+d^2}, 0 \right)$$

$$\text{若 } a, b, c, d=0 \text{ 则映为 } (0, 0, 0, 0, 0) \text{ 即 } \frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2+d'^2}}, \frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2+d'^2}}, \frac{c'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2+d'^2}}, \frac{d'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2+d'^2}}, 0$$

简单写

$$\varphi([a:b]) = \begin{cases} (\frac{b}{a}, \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2}) & \text{若 } a \neq 0 \\ (\frac{b}{N(b)}, 0) & \text{若 } a = 0 \end{cases}$$

这在我们看就记为 $S^7/S^3 \cong HP^1 \cong S^4$ 意味 S^3 在 S^7 上 h 作用下的商集同胚于 S^4
或写为 $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4(HP^1)$ (这其实是 HP^1 上典则丛对 h 的球丛)

