

第十三次习题课讲义

① 上课内容回顾

1. 多项式环的定义
2. 多项式环的基本性质 (能保持系数环的什么性质)
3. 赋值环 (交换环之间的同态到多项式环的延拓)
4. 一元多项式环上的带余除法

—— 代数学基本定理
—— 最大公因子存在性

② 习题讲解

③ 拓展内容

1. 从理想角度看一元多项式环上的带余除法
2. 一元多项式环的主理想性
3. 多元多项式环和一般交换环上的一元多项式环研究的困难

(这里指的是 $K[X]$)

从理想角度看一元多项式环上的带余除法
首先为什么引入理想来研究一元多项式环? 我们来看 f 与 g , 相伴的两个多项式 ($f = u g, u \in K^*$)
任意一元多项式与 f 做带余除法

$$h = f \cdot T + r$$

↓

$$h = g(uT) + r$$

我们发现 r 不变

$$f = r_0 \bar{1}_1 + r_1$$

$$g = r_0(u^{-1} \bar{1}_1) + u^{-1} r_1$$

$$\Rightarrow (h, f) = (r_0, f)$$

$$= (r_0, r_1)$$

$$(h, g) = (r_0, g)$$

$$= (r_0, u^{-1} r_1)$$

$$r_0 = r_1 \bar{1}_2 + r_2$$

$$(r_0, r_1) = (r_2, r_1)$$

$$(r_0, u^{-1} r_1) = (u^{-1} r_1, r_2)$$

⋮

$$r_k = r_{k+1} \bar{1}_k$$

$$\tilde{r}_k, \tilde{r}_{k+1} \text{ 与 } r_k, r_{k+1} \text{ 有一个相同, 一差一个 } u^{-1} \Rightarrow \tilde{r}_{k+1} \text{ 与 } r_{k+1} \text{ 在相伴意义下相同}$$

$$\tilde{r}_k = \tilde{r}_{k+1} \tilde{1}_k$$

$$\text{从最终结果 } (f, f) = (h, g)$$

$$\text{or } (h, f) = u^{-1}(h, g)$$

从最终结果为 h 与 f 的最大公因子与 h 与 g 的最大公因子是一样的 (在相伴意义下)

我们希望用一种中然的方式来看待“相伴意义下相等”这个概念，理想就出现了！

定义. $I \subset R$ 为环的加法子群

1 称为理想若 $\forall r \in R, \alpha \in I \quad r\alpha \in I$

而最简单的理想即为一个元素生成的理想 $f \in R$ 则 $(f) = \{fr \mid r \in R\}$ 为 R 的一个理想. 称为 f 生成的理想

而 f 与 g 相伴 (或者说在相伴意义下相等) $\Leftrightarrow (f) = (g)$

利用理想 我们可以从另一个角度看最大公因子:

" f 与 g 的最大公因子 可以看成 (f, g) 的生成元 "

之前我们证明了 f 与 g 的最大公因子 一定是相伴元

即 $h_1 h_2$ 为 f 与 g 的最大公因子 那么 $(h_1) = (h_2)$

$$\begin{aligned} \text{而 } h_1 | f &\Leftrightarrow (h_1) \supset (f) & \Rightarrow (h_1) \supset (f, g) = \{gr + fs \mid r, s \in R[x]\} \\ h_1 | g &\Leftrightarrow (h_1) \supset (g) \end{aligned}$$

而我们又证明了 $h_1 = f u + g v \Rightarrow (h_1) \subset (f, g)$

$$\Rightarrow (h_1) = (f, g)$$

也就是说 $\forall f, g \in R[x]$ 若 h 为 f, g 的最大公因子 则 $(h) = (f, g)$

这样的话就不用担心相伴带来的冗余记号, 用理想来研究环是代数的基本方法之一.

2、一元多项式环 $R[x]$ 的主理想性

本节我们证明 $I \subset R[x]$ 理想 $\Leftrightarrow I = (f)$

这个结论从侧面说明了 $R[x]$ 这个环结构的简单

首先 $R[x]$ 上有自然的次数定义 $\deg: R[x] \rightarrow \mathbb{Z}$

我们取 I 中次数最小的元素 f 我们证明 $I = (f)$.

任取 $x \in I$ 若 $\deg x < \deg f$ 则 x 与 f 作带余除法 找了一个比 f 次数小的 x 与 f 中元素矛盾

$$\text{故 } I \cap \{x \mid \deg x < \deg f\} = \emptyset$$

$$\text{故 } I = (f)$$

其主理想性 几乎来自于其上的带余除法, 以后会碰到更多这样的环.

$k[x]$ 的主理想性立刻就能说明最大公因子的存在性

(f, g) 为 $k[x]$ 理想 假设由 h 生成 则 h 为 f, g 的最大公因子.

3. 多元多项式环和一般交换环上的一元多项式环研究的困难.

首先 多元多项式环 $k[x_1, \dots, x_n]$ 可以看作环 $k[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$ 上的一元多项式环

即 $k[x_1, \dots, x_n] \cong k[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$

而 这个多元多项式环上没有带余除法! 换句话说它存在不是主理想的理想.
这也是这类环研究的第一个困难. (理想的分类困难)

其次它上面的整除关系或者说不约化性很难以判断.

这是研究这类环的第二个困难 (~~不可约元~~ (不可约元难以判定) 是唯一分解整环的信息)

但好在 我们有 Hilbert 基定理告诉我们 $k[x_1, \dots, x_n]$ 是唯一的分解整环.

这对于这类环的研究就更进了一步. (我们仅通过不可约元就可以知道所有多项式的信息!)

从研究 $k[x_1, \dots, x_n]$ 上的素理想 (不可约元的推广) 开始研究这类环的基本方法.

而对于 $k[x]$ k 为一般交换环, 此时连唯一分解整环都不一定是

那研究就更加困难了.