一

1. (1) 由艾森斯坦判别法.

$a_2=-12$ $a_4=36$ $a_5=-12$ $a_1=a_3=0$ 都能被3整除

但a_5不能被$3^2=9$整除 $\therefore x^5-12x^3+36x-12$是既约多项式.

(2). 当$n>4$时. f一定不可约在$\mathbb{Z}[x]$中.

证明: 假设f可约 则 $f=(x-a_1)\cdots(x-a_n)+1=gh$, 其中$g,h\in\mathbb{Z}[x]$是不可逆元.

则 $f(a_i)=g(a_i)\cdot h(a_i)=1$ (由赋值同态)

$\therefore g(a_i)=h(a_i)=\pm1$ $\therefore g(x)-h(x)=0$ 有n个根

i) 当$g(x)-h(x)\neq0$时 则 $\deg(g-h)\geq n$ $=\deg(g)+\deg(h)$

$\therefore \deg(g)\geq n$或 $\deg(h)\geq n$ $\therefore \deg(gh)\geq n$ ~~而~~ $\because$只有$\deg(gh)=n$

$\therefore \deg(g)\leq\deg(gh)=n$ 且 $\deg(h)\leq\deg(gh)=n$

$\therefore$ 不妨设$\deg(h)=n$ $\therefore \deg(g)=0$ $\therefore g(x)=m\in\mathbb{Z}$ 只有$m=\pm1$

则时 $g(x)$可逆矛盾.

ii) 当$g(x)=h(x)$时. $f(x)=(g(x))^2$ $\therefore \deg(f)$一定是偶数. 不妨设为$2k>4$ $\therefore k>2$

$\therefore \deg(g)=k=\deg(h)$ $\therefore (g(x))^2-1=(x-a_1)\cdots(x-a_n)=(g(x)-1)(g(x)+1)$

又$\because (x-a_1),\cdots,x-a_n$在$\mathbb{Z}[x]$只是素元 $\therefore$ 一定有k个$x-a_i$整除$g(x)-1$, 其余k个$x-a_j$整除$g(x)+1$, 不妨设 $(x-a_1)\cdots(x-a_k)\mid g(x)-1$, $(x-a_{k+1})\cdots(x-a_{2k})\mid g(x)+1$

则 $(g(x)+1)-(g(x)-1)=2=(x-a_{k+1})\cdots(x-a_{2k})-(x-a_1)\cdots(x-a_k)$

$\therefore 2=(a_1-a_{k+1})\cdots(a_1-a_{2k})$ 而2在$\mathbb{Z}$中只有$1\cdot2$这一种分解. 而$k>2$ 矛盾.

综上 f不可约.

(3) (x^2+1)最大公因子

(4) 不是

2. (1) $a_0\neq0 \iff$ 存在幂级数$g\in P[[x]]$, 使得$fg=1$.

证明: "$\Rightarrow$" 若$a_0\neq0$. 要想使g满足$fg=1$. 即 设$g=\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i$

$$fg=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i}a_jb_{i-j}\right)x^i=1 \quad (a_0\neq0)$$

$\therefore a_0b_0=1$且$\sum_{j=0}^{i}a_jb_{i-j}=0$ (对所有$i\geq1$都成立)

$\therefore a_0=b_0^{-1}$ $\sum_{j=0}^{i}a_jb_{i-j}=a_0b_i+a_1b_{i-1}+\cdots+a_ib_0=b_0^{-1}b_i+a_1b_{i-1}+\cdots+a_ib_0=0$

$\therefore b_i=-(b_0a_1b_{i-1}+\cdots+b_0a_ib_0)\Rightarrow b_1=-b_0a_1b_0$; $b_2=-b_0a_1b_1-b_0a_2$

每个 b_i 可唯一解出 ∴ g 存在

"$\Leftarrow$" 若 $fg=1$ ∴ $a_0b_0=1$ ∴ $a_0\neq 0$.

(2). $(1-X)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}b_iX^i$

其中 $a_0=1$ $a_1=-1$ $a_2=\cdots=0$

∴ $b_0=1$ ∴ $b_1=-b_0a_1b_0=1$ $b_2=-b_0a_1b_1=1$ … $b_{i+1}=-(b_0a_1b_i+\cdots+b_0a_ib_0)$

$=-(b_0a_1b_i)=b_i=1$

∴ $\sum_{i=0}^{\infty}b_iX^i=\sum_{i=0}^{\infty}X^i$

(3) 每一个形式幂级数 $f(x)=a_kx^k+a_{k+1}x^{k+1}+\cdots$

其中 $a_k\neq 0$ $k\geq 0$ 且 $f(x)=x^k(a_k+a_{k+1}x+\cdots)$

∵ $a_k+a_{k+1}x+\cdots$ 可逆 ∴ $f(x)$ 与 x^k 相伴. 只需考虑 $P[[x]]$ 中 x^i 是否是素元, 则在精确到相伴的意义下, 可归纳出所有 $f(x)$ 的素元性质.

当 $i\geq 2$ 时 x^i 均不是素元 ∵ $x^i\mid x^{i-1}\cdot x^{i-1}$ 而 $x^i\nmid x^{i-1}$ ∴ 只有 x 是素元.

(4) $P[[x]]$ 是唯一分解整环

证明: 只须证 $P[[x]]$ 中所有不可约元是素元. 即证 x 是 $P[[x]]$ 中唯一的不可约元. 即证任意的不可约元在相伴意义下都与 x 相伴.

设 f 是 $P[[x]]$ 中不可约元 ∴ $f=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix^i$ ($a_0\neq 0$ 时 f 可逆, 此时 f 不是不可约元)

∴ $f=x\sum_{i=1}^{\infty}a_ix^{i-1}$ 当 $a_1\neq 0$ 时 f 与 x 相伴; 当 $a_1=0$ 时. $f=x\cdot x\sum_{i=2}^{\infty}a_ix^{i-2}$

f 可写成两个不可逆元的乘积, f 不是不可约的, 矛盾. 故只有 $a_1\neq 0$. f 与 x 相伴.

∴ 所有不可约元都是素元.

3. 证明: 设 $f(X,Y)=f_1(X,Y)f_2(X,Y)\cdots f_k(X,Y)$, 其中 $f_1\cdots f_k$ 都是不可约的. $Q[X,Y]$

定义~~齐次运算~~映射 $f(X,Y)\mapsto \tilde{f}(X,Y)=f(\frac{X}{Y},1)Y^{deg(f(X,Y))}$ 是 $Q[X,Y]$ 到 ~~$Q[X,Y]$~~ 的

$\widetilde{fg}=fg(\frac{X}{Y},1)Y^{deg(fg(X,Y))}=f(\frac{X}{Y},1)g(\frac{X}{Y},1)Y^{deg(f(X,Y))+deg(g(X,Y))}$

$=\tilde{f}(\frac{X}{Y},1)\tilde{g}(\frac{X}{Y},1)$

且对 $\forall f\in Q[X,Y]$ $deg(\tilde{f},Y)\geq deg(f,Y)$

当 f 齐次时 $\Leftrightarrow \tilde{f}=f$ ∴ $f=\tilde{f}=\tilde{f}_1\tilde{f}_2\cdots\tilde{f}_k=f_1\cdots f_k(\frac{X}{Y},1)Y^{\sum_{i=1}^{k}deg(f_i(X,Y))}=f_1\cdots f_k(X,Y)$

∵ $f_1\cdots f_k$ 不可约 ∴ ~~不也不含有~~ f 也不含有 Y 项 令 $f_2\cdots f_k=h(X,Y)$

∴ $f_1(\frac{X}{Y},1)Y^{deg(f_1(X,Y))}h(\frac{X}{Y},1)Y^{deg(h(X,Y))}=f_1\cdot h$ ∴ $\tilde{f}_1=f_1$

~~u在R[x]上整~~ $a u^n \in R[x] \Rightarrow a(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)^m \in R[x]$

$m=1$ 时 $\Rightarrow$ $aa_i \in R$ $i=0,1,2,\cdots,n$ $\quad aa_0^m \in R\ (\forall m) \Rightarrow a_0$在R上完全整

$\Rightarrow a_1x+\cdots+a_nx^n$在$R[x]$上完全整 $\quad \alpha(a_1x+\cdots+a_nx^n)^m$的最低项

$\therefore \alpha a_1^m \in R\ (\forall m) \Rightarrow a_1$在R上完全整 $\Rightarrow \cdots\cdots \Rightarrow a_i$在R上完全整$(i=0,1,2,\cdots n)$

(5) 由假设 a_i在R_0上完全整 $\Rightarrow a_i$在R_0上整 $\Rightarrow u=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \in R[x]$ 故$R[x]$完全整闭整环.

$\therefore f_i$ 也是不可约的

~~当 f 即约时~~ 当 $f(X,1)$ 不是不可约时，$f(X,1)=g(X,1)h(X,1)$ $\therefore$

$\therefore \cancel{f(\frac{X}{Y},1)\deg(f(X,1))}$

$$\therefore f(\frac{X}{Y},1)Y^{\deg(f(X,Y))}=g(\frac{X}{Y},1)Y^{\deg(g(X,Y))}h(\frac{X}{Y},1)Y^{\deg(h(X,Y))}$$

$\therefore f=g\cdot h$ 与 f 即约矛盾

当 $f(X,Y)$ 不是不可约时，$f(X,Y)=g(X,Y)h(X,Y)$

$\therefore f(X,1)=g(X,1)h(X,1)$ 且 $g(X,1)$ ~~不可~~含有 X，$h(X,1)$ 含有 X

$\therefore g(X,1)$ 与 $h(X,1)$ 不可逆 $\therefore$ 与 $f(X,1)$ 既约矛盾

4. (1) 任取 $u\in K$ $f=a_0+\cdots+a_nx^n$ s.t. $f(u)=0$

记 $u=\frac{u_1}{u_2}$ $u_1,u_2\in R$ 代入 $f(u)=0$ $(\frac{u_1}{u_2})^n+a_{n-1}(\frac{u_1}{u_2})^{n-1}+\cdots+a_0=0$

$\Rightarrow u_1^n+a_{n-1}u_1^{n-1}u_2+\cdots+a_0u_2^n=0$ 是R中所有可逆元

$\Rightarrow \pi\mid a_iu_1^iu_2^{n-i}$ $\forall i<n$ 但是 $\pi\nmid u_1^n$ 矛盾 除非 $u_2\in U(R)$ 集合

那么 $u\in R$ $\Rightarrow$ R 为整闭整环

(2) 任取 $u\in K$，u 为完全整元 则 $\exists a\in R$ s.t. $au^n\in R$ $\forall n$

记 $u=\frac{u_1}{u_2}$ u_1,u_2 互素 若 $u_2\notin U(R)$ 取 ~~[illegible]~~ $\pi\mid u_2$ $\pi\nmid u_1$

$u_1,u_2\in R$ 则 $au^n=\frac{au_1^n}{u_2^n}$ $\because$ a 的分解中 π 的重数有限，故不可能 $\forall n$ 都有 $au^n\in R$

故 $u_2\in U(R)\Rightarrow u\in R$ $\Rightarrow$ R 为完全整闭整环

(3) $\forall u\in K$，u 在 R 上整

则 $\exists f\in R[x]$ s.t. $f(u)=0$

$u^n+a_{n-1}u^{n-1}+\cdots+a_0=0$ 这说明若 $au,au^2,\cdots au^{n-1}\in R$ 那么 $au^m\in R$ $\forall m\in N$

这样的 a 一定存在，比如 $u=\frac{u_1}{u_2}$ 那么取 $a=u_2^{n-1}$ 即可.

故 u 完全整元

若 R 为完全整闭整环 $\forall u\in K$ 若 u 在 R 上整 则上述结论 u 在 R 上完全整 $\Rightarrow u\in R$

从而 R 为整闭整环.

(4) $\because K(X)$ 也是 $K[X]$ 的分式域而 $K[X]$ 为 UFD 故完全整闭

从而 u 在 $R[x]$ 上整，自然在 $K[x]$ 上整 $\therefore u\in K[x]$ 记 $u=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ $a_i\in K$

由于 u 在 $R[x]$ 上整 $\Rightarrow$ u 在 $R[x]$ 上完全整 $\exists a\in R[x]$ s.t. $au^n\in R[x]$ ~~[illegible]~~