第二周习题课

§1 子空间与直和

§1.1 子空间

例 1.1 *(i)* 设 $T_0 = \{A \in \mathrm{M}_n(F) | \mathrm{tr}(A) = 0\}$. 证明*:* T_0 是 $\mathrm{M}_n(F)$ 的子空间.

(ii) 设 $D_0 = \{A \in \mathrm{M}_n(F) | \det(A) = 0\}$. 证明*:* D_0 是 $\mathrm{M}_n(F)$ 的子空间当且仅当 $n = 1$.

证明. *(i)* 设 $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$ 是 T_0 中的矩阵, $\alpha, \beta \in F$.

(直接法).

$$\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{tr}(A) + \beta \mathrm{tr}(B) = 0 \implies \alpha A + \beta B \in T_0.$$

(映射法). 因为 $T_0 = \ker(\mathrm{tr})$ 且 tr 是线性的, 所以 T_0 是子空间.

(解空间法). T_0 是关于未知数 $a_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n$ 的方程*(*组*)*

$$a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n} = 0$$

在 $F^{n \times n}$ 中的解空间. 于是它是子空间.

(ii) 当 $n = 1$ 时, det 是恒同映射. 当 $n > 1$ 时.

$$\mathrm{diag}_n(1, 0, \ldots, 0) + \mathrm{diag}_n(0, 1, \ldots, 1) = E_n.$$

于是 D_0 加法不封闭, 不是子空间.

例 1.2 设 $\tilde{E} = \{f \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, f \text{ 是偶函数}\}$. 且 $\tilde{O} = \{f \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, f \text{ 是奇函数.}\}$. 证明*:* $\tilde{E}$ 和 $\tilde{O}$ 是子空间.

证明. 我们证明 $\tilde{O}$ 是子空间. 设 $f, g \in \tilde{O}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 则对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 我们有

$$(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = -\alpha f(x) - \beta g(x) = -(\alpha f + \beta g)(x).$$

于是, $\alpha f + \beta g \in \tilde{O}$. $\square$

定义 1.3 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$. 如果 A 中每一行元素之和以及每一列元素之和都等于一个共同的数, 则称 A 是 $\mathbb{Q}$ 上的一个半幻方 *(semi-magic square)*. 这个数记为 $\sigma(A)$. 设 A 是半幻方. 如果 A 的主对角线上元素之和以及副对角线上元素之和都等于 $\sigma(A)$, 则称 A 是幻方 *(magic square)*.

记号. 我们把 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ 中半幻方和幻方的集合分别记为 $\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})$ 和 $\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})$. 例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{是半幻方;} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \text{是幻方.}$$

注意到 $\sigma(A) = 5$ 和 $\sigma(B) = 15$.

例 1.4 证明*:* $\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})$ 和 $\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})$ 都是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ 的子空间.

证明. 我们来证明 $\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})$ 是子空间. 利用解空间法. 设 $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$. 则 $A \in \mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})$ 当且仅当

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k},\ i = 2, \ldots, n \quad \text{和} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k},\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

这是一个关于 a_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$ 个未知数的齐次线性方程组*(*共有 $2n-1$ 个方程*)*. 而 $\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})$ 是这个方程组在 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ 中的解空间.

对于 $\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})$, 只要再加入两个方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} \quad \text{和} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}$$

即可. □

§1.2 直和

命题 1.5 设 U 是线性空间, V, W, X, Y 是 U 的子空间. 如果 $U = V \oplus W$ 且 $V = X \oplus Y$, 则 $U = X \oplus Y \oplus W$.

证明. 设 $\mathbf{u} \in U$. 则存在唯一的 $\mathbf{v} \in V$ 和 $\mathbf{w} \in W$ 使得 $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, 且存在唯一的 $\mathbf{x} \in X$ 和 $\mathbf{y} \in Y$ 使得 $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. 于是存在唯一的 $\mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y$ 和 $\mathbf{w} \in W$ 使得 $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{w}$. □

例 1.6 利用例 *1.2* 中的符号证明*:* $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \tilde{E} \oplus \tilde{O}$.

证明. 设 $f \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. 则

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \in \tilde{E}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \in \tilde{Q} \quad \text{且} \quad f = g + h.$$

于是 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \tilde{E} + \tilde{O}$. 设 f 既是偶函数又是奇函数. 则 $f(x) = f(-x) = -f(x)$. 于是 $2f(x) = 0$, 即 f 是零函数. 由此可知, $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \tilde{E} \oplus \tilde{O}$. □

再设 $\tilde{E}_0 = \{f \in \tilde{E} \mid f(0) = 0\}$. 和 $\tilde{C}$ 是所有常值函数的集合. 可直接验证它们都是 $\tilde{E}$ 子空间. 下面我们来证明 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \tilde{E}_0 \oplus \tilde{C} \oplus \tilde{O}$. 可直接验证 $\tilde{E}_0$ 和 $\tilde{C}$ 都是 $\tilde{E}$ 的子空间. 设 $f \in \tilde{E}$. 令

$$g(x) = f(x) - f(0) \quad \text{和} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, h(x) = f(0).$$

则 $g \in \tilde{E}_0$, $h \in \tilde{C}$ 且 $f = g + h$. 显然, $\tilde{E}_0 \cap \tilde{C} = \{\tilde{0}\}$. 于是, $\tilde{E} = \tilde{E}_0 \oplus \tilde{C}$. 由命题 *1.5*, $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \tilde{E}_0 \oplus \tilde{C} \oplus \tilde{O}$. □

§2 线性相关性

例 2.1 设 $S \subset F[x] \setminus \{0\}$. 证明: 如果 S 中的元素两两次数不同, 则 S 是 F 上的线性无关集.

证明. 设 $f_1, \dots, f_k \in S$. 不妨设 $\deg(f_1) < \deg(f_2) < \cdots < \deg(f_k)$. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in F$ 使得 $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_{k-1} f_{k-1} + \alpha_k f_k = 0$. 如果 $\alpha_k \neq 0$, 则等式左侧是次数为 $\deg(f_k)$ 的多项式, 矛盾. 于是, $\alpha_k = 0$. 同样的推理依次可得, $\alpha_{k-1} = \cdots = \alpha_2 = 0$. 于是 $\alpha_1 f_1 = 0$. 因为 $f_1 \neq 0$, 所以 $\alpha_1 = 0$. 由此可知, $f_1, \dots, f_k$ 线性无关. 从而 S 是线性无关集. □

例 2.2 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. 判断 $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ 是否在 $\mathbb{R}$ 上线性相关.

若 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 中有两个数相同, 则 $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ 中有两个函数相同. 于是这组函数线性相关. 以下设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 两两不同.

赋值法. 设 $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\beta_1 e^{\alpha_1 x} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n x} = 0. \tag{1}$$

则当 x 取任何实数时该等式都成立. 我们取 $x = 0, 1, \dots, n-1$ 得到.

$$\beta_1 e^{\alpha_1 k} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

于是

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{\alpha_1} & e^{\alpha_2} & e^{\alpha_3} & \cdots & e^{\alpha_n} \\ (e^{\alpha_1})^2 & (e^{\alpha_2})^2 & (e^{\alpha_3})^2 & \cdots & (e^{\alpha_n})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e^{\alpha_1})^{n-1} & (e^{\alpha_2})^{n-1} & (e^{\alpha_3})^{n-1} & \cdots & (e^{\alpha_n})^{n-1} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\det(A) \neq 0$, 所以 $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$, 即 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 两两不同时, $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关.

微分法. 对 (1) 两边求 1 次, 2 次, ..., $n-1$ 次导数得

$$\beta_1\alpha_1^k e^{\alpha_1 x}+\cdots+\beta_n\alpha_n^k e^{\alpha_n x}=0, k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

写成矩阵形式

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} \beta_1 e^{\alpha_1 x} \\ \beta_2 e^{\alpha_2 x} \\ \beta_3 e^{\alpha_3 x} \\ \vdots \\ \beta_n e^{\alpha_n x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\det(B)\neq 0$, 所以 $\beta_1 e^{\alpha_1 x}=\cdots=\ldots,\beta_n e^{\alpha_n x}=0$. 于是, $\beta_1=\cdots=\beta_n=0$. 函数 $e^{\alpha_1 x},\ldots,e^{\alpha_n x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关.

设 $f_1,\ldots,f_n\in C^\infty(a,b)$, 其中 $C^\infty(a,b)$ 是在开区间 (a,b) 上处处可求各阶导数的函数. 定义

$$\mathrm{wr}(f_1,\ldots f_n)=\det\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

称之为 $f_1,\ldots,f_n$ 的 Wronskian.

例 2.3 设 $f_1,\ldots,f_n\in C^\infty(a,b)$. 证明: 如果 $f_1,\ldots,f_n$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性相关, 则 $\mathrm{wr}(f_1,\ldots,f_n)$=0.
证明. 设 $\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_n f_n=0$, 其中 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ 不全为零. 则

$$\alpha_1 f_1^{(k)}+\cdots+\alpha_n f_n^{(k)}=0,\quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

于是

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & f_3' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & f_3^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 不全为零, 所以 $\det(C)=0$, 即 $\mathrm{wr}(f_1',\ldots,f_n')=0$. □

注解 2.4 上述结论的逆命题在一定条件下也成立. 例如: 当 $n=2$ 且 f_1 恒为正时, $\mathrm{wr}(f_1,f_2)=0\implies f_1,f_2$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性相关.

命题 2.5 设 $f_1, \dots, f_n \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. 则 $f_1, \dots, f_n$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关当且仅当存在 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ 使得行列式

$$D_n = \det \begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & f_3(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & f_3(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & f_3(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{pmatrix} \neq 0.$$

证明. 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$. 则对任意的 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, 我们有 $\lambda_1 f_1(a_i) + \cdots + \lambda_n f_n(a_i) = 0$, $i = 1, 2 \dots, n$. 利用矩阵我们得到

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & f_3(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & f_3(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & f_3(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

如果存在 $a_1, \dots, a_n$ 使得 $\det(A) \neq 0$. 则 (2) 只有平凡解. 于是, $f_1, \dots, f_n$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关.

反之, 我们设 $f_1, \dots, f_n$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关. 我们对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, $f_1 \neq 0$. 于是存在 $a_1 \in \mathbb{R}$ 使得 $f_1(a_1) \neq 0$. 结论成立. 设 $n > 1$ 且结论对 $n-1$ 成立. 因为 $f_1, \dots, f_{n-1}$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关, 所以存在 $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ 使得

$$D_{n-1} = \det \begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & f_3(a_1) & \cdots & f_{n-1}(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & f_3(a_2) & \cdots & f_{n-1}(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_{n-1}) & f_2(a_{n-1}) & f_3(a_{n-1}) & \cdots & f_{n-1}(a_{n-1}) \end{pmatrix} \neq 0.$$

如果不存在 $a_n \in \mathbb{R}$ 使得 $D_n \neq 0$. 则对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, 我们有对任意得 $x \in \mathbb{R}$,

$$\det \begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_{n-1}(a_1) & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_{n-1}(a_2) & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_1(a_{n-1}) & f_2(a_{n-1}) & \cdots & f_{n-1}(a_{n-1}) & f_n(a_{n-1}) \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_{n-1}(x) & f_n(x) \end{pmatrix} = 0.$$

按最后一行展开得

$$(-1)^{2n} D_{n-1} f_n(x) + \mu_{n-1} f_{n-1}(x) + \cdots + \mu_1 f_1(x) = 0.$$

因为 $D_{n-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mu_{n-1}, \dots, \mu_2, \mu_1 \in \mathbb{R}$, 所以 $f_1(x), \dots, f_{n-1}(x), f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性相关. 矛盾. □