第三周习题课

§1　关于习题

4. 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$, 其中 F 是域. 方阵 A 的迹记为 $\mathrm{tr}(A)$. 令 $f(t) = \det(tE - A) \in F[t]$.

(i) 证明: $\deg_t(f) = n$.

(ii) 证明: f 中关于 t^{n-1} 的系数等于 $-\mathrm{tr}(A)$.

(iii) 设: f 在 F 中有 n 个根 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. 证明: $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \mathrm{tr}(A)$.

证明. 设 $A = (a_{i,j})_{n\times n}$. 则

$$f(t) = \det \begin{pmatrix} t - a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & t - a_{2,2} & \cdots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \cdots & t - a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

注意到在行列式的定义公式中每个乘积中出现的元素来自不同的行和不同的列, 于是

$$f(t) = (t - a_{1,1})(t - a_{2,2}) \cdots (t - a_{n,n}) + g,$$

其中 $\deg(g) < n - 1$. 更详细第说这是因为如果一个乘积中出现了对角线上的 $n - 1$ 个元素, 那么剩下的那个元素必然也在对角线上. 由此可知, $f(t)$ 中关于 t^n 和 t^{n-1} 的系数与 $(t - a_{1,1})(t - a_{2,2}) \cdots (t - a_{n,n})$ 中关于 t^n 和 t^{n-1} 的系数相同. 我们得到

$$f = t^n - (a_{1,1} + \cdots + a_{n,n})t^{n-1} + h,$$

其中 $\deg(h) < n - 1$. 这样就证明了 (i) 和 (ii). 直接利用 Vieta 定理我们得到 (iii). □

这个习题得结论由一个有趣得推广. 它在线性代数中有应用. 定义

$$M_A \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_k \\ i_1, \ldots, i_k \end{pmatrix}$$

是 A 得一个 k 阶主子式, 其中 $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$. 则上述多项式 $f(t)$ 中关于 t^{n-k} 得系数是 $(-1)^k$ 乘以 A 得所有 k 阶主子式之和, $k = 1, 2, \ldots, n$. 关于这个结论的证明见本讲义的附录.

5. 设 F 是域, $h \in F[x_1, \ldots, x_n] \setminus F$ 是齐次的多项式. 证明: h 在 $F[x_1, \ldots, x_n]$ 中的因子都是齐次的.

证明. 设 $h=pq$, 其中 $p,q\in F[x_1,\dots,x_n]$ 且 p,q 的次数都大于零. 假设 p 是非齐次的. 则 p 的齐次分解具有形式

$$p=p_k+p_{k-1}+\cdots+p_\ell,$$

其中 p_i 是 i 齐次的, $i=\ell,\cdots,k-1,k$, 且 $k>\ell$, $p_k\neq 0$, $p_\ell\neq 0$. 而 p 的齐次分解具有形式

$$q=q_s+q_{s-1}+\cdots+q_t,$$

其中 q_i 是 i 齐次的, $i=t,\cdots,s-1,s$, 且 $s\geq t$, $q_s\neq 0$, $q_t\neq 0$. 则

$$h=(p_k+p_{k-1}+\cdots+p_\ell)(q_s+q_{s-1}+\cdots+q_t).$$

于是 h 中次数最高的非零齐次分支是 p_kq_s 而次数最低的非零齐次分支是 $p_\ell q_t$. 因为 $k+s>\ell+t$, 所以 h 至少有两个不同次数的齐次分支, 即 h 是非齐次的. 矛盾. $\square$

6. 如何计算 $p\in\mathbb{Q}[x]$ 的不可约单因子之积? (单因子是指重数等于 1 的因子).

解. 设 $p=p_1^{m_1}\cdots p_k^{m_k}$, 其中 $p_1,\dots p_k\in\mathbb{Q}[x]\setminus\mathbb{Q}$ 是两两互不相伴的不可约多项式, $m_1,\dots,m_k\in\mathbb{Z}^+$. 由第零次讲义中定理 5.1 的证明可知:

$$g=\gcd(p,p')=p_1^{m_1-1}\cdots p_k^{m_k-1}\quad 和\quad h=\frac{p}{\gcd(p,p')}=p_1\cdots p_k.$$

则

$$\gcd(g,h)=\prod_{i=1,m_i>1}^{k}p_i.$$

它是 p 中所有重数大于 1 的不可约因子之积. 于是, p 的所有一重因子之积等于

$$\frac{h}{\gcd(g,h)}=\prod_{j=1,m_j=1}^{k}p_j.\quad\square$$

§2 商空间、基底和维数

例 2.1 *(i) 设 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_d$ 是 F^n 的前 d 个标准基中的元素($0<d<n$), $V=\langle\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_d\rangle$. 计算 F^n/V 的一组基和维数.*

(ii) 设 $p\in F[x]\setminus\{0\}$, $V=\{f\in F[x]\,|\,p|f\}$. 验证 V 是子空间并计算 $F[x]/V$ 的一组基和维数.

解. *(i) 由讲义中引理 4.14 的证明可知, $\mathbf{e}_{d+1}+V,\cdots,\mathbf{e}_n+V$ 是 F^n/V 的一组基. 于是, $\dim(F^n/V)=n-d$.*

(ii) 设 $f,g\in V$. 由第一学期第五章讲义一中的引理 2.1 可知, 对于任意的 $\alpha,\beta\in F$, $\alpha f+\beta g\in V$. 我们验证了 V 是子空间.

设 $d=\deg(p)$. 我们来验证 $1+V,x+V,\ldots,x^{d-1}+V$ 是 $F[x]/V$ 的一组基. 设 $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-1}\in F$ 使得

$$\alpha_0(1+V)+\alpha_1(x+V)+\cdots+\alpha_{d-1}(x^{d-1}+V)=V.$$

则

$$\underbrace{(\alpha_0+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_{d-1}x^{d-1})}_{h}+V=V \implies h\in V.$$

因为 $p|h$ 且 $\deg(h)<\deg(p)$, 所以 $h=0\implies \alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_{d-1}=0$. 于是, $1+V,x+V,\ldots,x^{d-1}+V$ 线性无关. 设 $f+V\in F[x]/V$, 其中 $f\in F[x]$. 设 $r=\mathrm{rem}(f,p,x)$. 则 $f-r\in V$. 于是 $f+V=r+V$. 因为 $\deg(r)<d$, 所以 r 是 $1,x,\ldots,x^{d-1}$ 在 F 上的线性组合. 由此可知, $r+V$ 是 $1+V,x+V,\ldots,x^{d-1}+V$ 在 F 上的线性组合. 从而 $1+V,x+V,\ldots,x^{d-1}+V$ 是 $F[x]/V$ 的一组基且 $\dim(F[x]/V)=d$.

注意到, 当空间和子空间都是无穷维时, 它们的商空间可以是有限维的.

例 2.2 设齐次线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}_m$, 其中 $A\in F^{m\times n}$, $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^t$ 和 $\mathbf{0}_m$ 是 F^m 中的零向量. 令 $B\in F^{k,n}$, 新的方程组为

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}_{m+k}.$$

设这两个方程组的解空间分别是 U 和 V. 证明 $\dim(V)\geq\dim(U)-k$.

证明. *(方法1)* 利用上学期的结论, 系数矩阵的秩 + 解空间的维数 = 未知数的个数. 我们有

$$\mathrm{rank}(A)+\dim(U)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}+\dim V\implies \dim(U)-\dim(V)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}-\mathrm{rank}(A)\leq k.$$

于是 $\dim(V)\geq\dim(U)-k$.

(方法2) 先证如下不等式, 设 W_1,W_2 是 n 维线性空间 W 的子空间且 $\dim(W_2)\geq n-1$. 则

$$\dim(W_1\cap W_2)\geq\dim(W_1)-1.$$

这是因为

$$\dim(W_1\cap W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1+W_2)\geq\dim(W_1)+n-1-n=\dim(W_1)-1,$$

所以上述不等式成立.

设 U_i 为以 B 中第 i 行为系数矩阵的齐次方程的解空间, 则 $\dim(U_i) \geq n-1$, , $i=1,2,\ldots,k$. 而 $V = U \cap U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$. 由上述不等式得

$$\begin{aligned}
& \dim(U \cap U_1) \geq \dim(U) - 1 \\
\Longrightarrow\ & \dim((U \cap U_1) \cap U_2) \geq \dim(U) - 2 \\
& \vdots \\
\Longrightarrow\ & \dim(\underbrace{(U \cap U_1 \cap \cdots \cap U_{k-1}) \cap U_k}_{V}) \geq \dim(U) - k. \quad \square
\end{aligned}$$

§3　线性空间的笛卡尔积

设 V 和 W 是 F 上的线性空间. 在 $V \times W$ 上定义

$$\forall\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W,\ (\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) + (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$$

和

$$\forall\ \alpha \in F,\ \alpha(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) = (\alpha\mathbf{v}_1, \alpha\mathbf{w}_1).$$

可直接验证 $V \times W$ 是 F 上的线性空间, 其零向量是 $(\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W)$. 此外我们有四个自然的线性映射. 两个自然嵌入是

$$\begin{array}{rccc} \phi_V: & V & \longrightarrow & V \times W \\ & \mathbf{v} & \mapsto & (\mathbf{v}, \mathbf{0}_W) \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \phi_W: & W & \longrightarrow & V \times W \\ & \mathbf{w} & \mapsto & (\mathbf{0}_V, \mathbf{w}). \end{array}$$

两个自然投射是

$$\begin{array}{rccc} \psi_V: & V \times W & \longrightarrow & V \\ & (\mathbf{v}, \mathbf{w}) & \mapsto & \mathbf{v} \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \psi_W: & V \times W & \longrightarrow & W \\ & (\mathbf{v}, \mathbf{w}) & \mapsto & \mathbf{w}. \end{array}$$

例 3.1 设 V 和 W 都是有限维线性空间. 证明: $\dim(V \times W) = \dim(V) + \dim(W)$.

证明. *(方法1)* 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的基, $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ 是 W 的基. 可直接证明 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{0}_W)$, $\ldots$, $(\mathbf{v}_m, \mathbf{0}_W)$, $(\mathbf{0}_V, \mathbf{w}_1)$, $\ldots$, $(\mathbf{0}_V, \mathbf{w}_n)$ 是 $V \times W$ 的基.

(方法2) 考虑自然投射 ψ_V. 我们有 $\ker(\psi_V) = \{\mathbf{0}_V\} \times W$ 且 $\operatorname{im}(\psi_V) = V$. 由命题 *4.15* 可知, $\dim(V \times W) = \dim(\ker(\psi_V)) + \dim(\operatorname{im}(\psi_V)) = \dim(W) + \dim(V)$. $\square$

§4　半幻方和幻方

例 4.1 设 $n > 2$, E 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ 中的单位矩阵, $\hat{E}$ 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ 中副对角线元素都是 1, 而其它元素都等于零的矩阵. 令 $U = \{\lambda E \mid \lambda \in \mathbb{Q}\}$ 和 $\widehat{U} = \{\lambda\hat{E} | \lambda \in \mathbb{Q}\}$. 证明: $\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q}) + U + \widehat{U}$. 是直和.

证明. 设 $A+\lambda E+\mu\widehat{E}=O$, 其中 $A\in \mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})$. 则 $\lambda E+\mu\widehat{E}\in \mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})$. 当 $n=2m$ 时, 我们有 $\lambda+\mu=2m\lambda=2m\mu$. 再由 $m>1$ 得到 $\lambda=\mu=0$. 从而 $A=O$. 由讲义中直和的等价条件可得 $\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})+U+\widehat{U}$ 是直和. 当 $n=2m+1$ 时, $\lambda+\mu=(2m+1)\lambda+\mu$. 因为 $m>0$, 所以 $\lambda=0$. 从而 $\mu=0$. 由此可知, $\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})+U+\widehat{U}$ 是直和. □

§5 附录: 特征多项式的系数与主子式

引理 5.1 设 $P=(p_{ij})_{n\times n}$, 其中 $p_{ij}\in F[x]$, $'=d/dx$. 则

$$|P|'=\begin{vmatrix} p'_{1.1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n}\\ p'_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p'_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p_{1.1} & p'_{1,2} & \cdots & p_{1,n}\\ p_{2,1} & p'_{2,2} & \cdots & p_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{n,1} & p'_{n,2} & \cdots & p_{n,n}\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} p_{1.1} & p_{1,2} & \cdots & p'_{1,n}\\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p'_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p'_{n,n}\end{vmatrix}.$$

证明. 由行列式的定义可知

$$|P|=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon_\sigma p_{\sigma(1),1}p_{\sigma(2),2}\cdots p_{\sigma(n),n}.$$

由导数的乘法规则可知

$$|P|'=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon_\sigma p'_{\sigma(1),1}p_{\sigma(2),2}\cdots p_{\sigma(n),n}+\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon_\sigma p_{\sigma(1),1}p'_{\sigma(2),2}\cdots p_{\sigma(n),n}+\cdots+\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon_\sigma p_{\sigma(1),1}p_{\sigma(2),2}\cdots p'_{\sigma(n),n}.$$

再应用行列式的定义到上面的 n 个和式就证明了引理. □

设 $A\in \mathrm{M}_n(F)$, t 是 域 F 上的未定元. $\chi_A=\det(tE-A)\in F[t]$ 称为 A 的特征多项式. 由前面的知识可知, $\deg(\chi_A)=n$ 和 $\mathrm{lc}(\chi_A)=1$. 下面我们来确定 χ_A 的所有系数.

引理 5.2 设 $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, $B=tE-A$. 则

$$\chi_A^{(k)}=k!\times\boxed{B\text{ 的所有 }(n-k)\text{ 阶主子式之和,}}$$

其中 $\chi_A^{(k)}$ 代表 χ_A 关于 t 的 k 阶导数.

证明. 注意到对 $|B|$ 中某一列中元素求导, 把这列中除了含有 t 的元素变成 1 外, 其它元素都变成零. 而对同一行求两次导后该行变成了零向量. 由引理 5.1 可知

$$\chi_A^{(k)}=k!\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}|B|^{(j_1,\ldots,j_k)},$$

其中 $|B|^{(j_1,\ldots,j_k)}$ 代表 B 中 j_1 列, j_2 列, $\ldots$, j_k 列求导一次后的矩阵的行列式, $1\le j_1<\cdots<j_k\le n$. 注意到整数因子 $k!$ 来自用引理 5.1 求多次导数对固定的 k 列有不同的顺

序, 共 $k!$ 个顺序. 设 $\{i_1, i_2, \dots, i_{n-k}\} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$ 且 $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-k}$. 则

$$|B|^{(j_1,\dots,j_k)} = M_B \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_{n-k} \\ i_1, \dots, i_{n-k} \end{pmatrix}.$$

由上述两式引理中等式成立. □

引理 5.3 设 F 的特征为零, $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 则

$$\chi_A(t) = t^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k,$$

其中 $\alpha_{n-k} = (-1)^{n-k} \times \boxed{A \text{ 的所有 } (n-k) \text{ 阶主子式之和}}$.

证明. 因为 F 的特征为零, $k!$ 在 F 中可逆. 于是, Taylor 公式给出:

$$\chi_A(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\chi_A^{(k)}(0)}{k!} t^k. \tag{1}$$

由引理 5.2 可知,

$$\chi_A^{(k)}(0) = k! \times \boxed{-A \text{ 的所有 } (n-k) \text{ 阶主子式之和}} = (-1)^{n-k} k! \times \boxed{A \text{ 的所有 } (n-k) \text{ 阶主子式之和.}}$$

把此式代入 (1) 得到引理. □

命题 5.4 设 F 是任意特征的域, $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(F)$. 则

$$\chi_A(t) = t^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k,$$

其中 $\alpha_{n-k} = (-1)^{n-k} \times \boxed{A \text{ 的所有 } (n-k) \text{ 阶主子式之和}}$.

证明. 若 F 的特征等于零, 则命题由引理 5.3 成立. 设 F 的特征是 $p > 0$. 设 $X = (x_{i,j})_{n \times n}$, 其中 $x_{i,j}$ 是未定元, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. 在整环 $\mathbb{Z}[x_{1,1}, \dots, x_{1,n}, \dots, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}][t]$ 中考虑特征多项式 $\chi_X(t)$. 设

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & F \\ & n & \mapsto & n1_F. \end{array}$$

可直接验证 ϕ 是环同态. 由赋值同态定理 ϕ 可扩充为一个从 $\mathbb{Z}[x_{1,1}, \dots, x_{1,n}, \dots, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}][t]$ 到 $F[[t]$ 的环同态使得

$$\phi(x_{i,j}) = a_{i,j},\ i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{和} \quad \phi(t) = t.$$

于是 $\phi(\chi_X(t)) = \chi_A(t)$. 由此可知, ϕ 把 X 的所有 $(n-k)$ 阶主子式之和映到 A 的所有 $(n-k)$ 阶主子式之和. 因为 $\mathbb{Z}[x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}, \ldots, x_{n,1}, \ldots, x_{n,n}]$ 的分式域特征等于零, 所以 $\chi_X(t)$ 中关于 t^k 系数等于

$$(-1)^{n-k} \times \boxed{X \text{ 的所有 } (n-k) \text{ 阶主子式之和.}}$$

再由 $\phi(\chi_X(t)) = \chi_A(t)$ 可知, $\chi_X(t)$ 中关于 t^k 系数等于

$$(-1)^{n-k} \times \boxed{A \text{ 的所有 } (n-k) \text{ 阶主子式之和.}} \quad \square$$