第四周习题课

§1 关于习题

3.1. *设 $\sin(x), \cos(x) \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. 问 $\sin(x), \cos(x)$ 是否在 $\mathbb{R}$ 上线性相关?*

赋值法. 设 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 使得 $\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}^+$. 则

$$\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mu \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad 和 \quad \lambda \sin(\pi) + \mu \cos(\pi) = 0.$$

即

$$\lambda = 0 \quad 和 \quad -\mu = 0.$$

于是 $\sin(x), \cos(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关.

微分法. 设 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 使得 $\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}^+$. 则 $\lambda \cos(x) - \mu \sin(x) = 0$. 于是

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

注意到 $\det(A) = -1$. 于是对任意取定的 $x \in \mathbb{R}^+$, $\mathrm{rank}(A) = 2$. 由此可知 $\lambda = \mu = 0$, $\sin(x), \cos(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关.

3.2. *$x^2 + k \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $k = 1, 2, \ldots, n$ 是否在 $\mathbb{R}$ 上线性相关?*

多项式法. $n = 1$. $x^2 + 1 \neq 0$, 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关.

$n = 2$. 设 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha_1(x^2+1) + \alpha_2(x^2+2) = 0$. 则 $p(x) = (\alpha_1+\alpha_2)x^2 + \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 都成立. 于是 $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ 且 $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$, 即

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因为 A 满秩, 所以 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. 于是 $x^2 + 1$ 和 $x^2 + 2$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关.

$n = 3$. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha_1(x^2+1) + \alpha_2(x^2+2) + \alpha_3(x^2+3) = 0$. 则对任意的 $x \in \mathbb{R}$,

$$p(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0.$$

于是 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ 且 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$, 即

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因为 A 不是列满秩, 所以上述方程组有非平凡解. 于是 x^2+1, x^2+2 和 x^2+3 在 $\mathbb{R}$ 上线性相关. 进而, 当 $n>3$ 时, 这 n 个函数 在 $\mathbb{R}$ 线性相关.

3.3. *$f_k = 1/(x+k)$, $k=1,2,\ldots,n$ 是否在 $\mathbb{R}$ 上线性相关?*

微分法. 设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n\in\mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_{n-1}f_{n-1}+\alpha_n f_n = 0.$$

注意到

$$f_k^{(m)} = \beta_m f_k^{m+1}.$$

其中 $\beta_m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 与 k 无关. 于是

$$\mathrm{wr}(f_1,\ldots,f_{n-1},f_n) = \beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1}f_1\cdots f_n \det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ f_1 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_1^{n-1} & \cdots & f_{n-1}^{n-1} & f_n^{n-1} \end{pmatrix} \neq 0.$$

由第一章第一次习题课讲义例 2.3, $f_1,\ldots,f_n$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关.

多项式法. 假设 $f_1,\ldots f_n$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性相关. 不妨设

$$f_n = \alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_{n-1}f_{n-1},\quad \alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}\in\mathbb{R}.$$

则对任意 $x\in\mathbb{R}^+$, $(x+1)\cdots(x+k-1) = p(x)(x+k)$, 其中 p 是一个关于 x 的多项式函数. 于是, 把 x 看成未定元时上述等式仍成立. 因为 $k\notin\{1,2,\ldots,k-1\}$, 所以 $(x+k)\nmid(x+1)\cdots(x+k-1)$. 矛盾.

4.1. *设 $\Delta:\mathbb{C}[x]\longrightarrow\mathbb{C}[x]$ 由公式 $\Delta(f(x)) = f(x+1)-f(x)$ 定义. 验证 Δ 是 $\mathbb{C}$ 上的线性映射.*

证明. 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $f,g\in\mathbb{C}[x]$.

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha f+\beta g) &= (\alpha f+\beta g)(x+1)-(\alpha f+\beta g)(x)\\ &= \alpha(f(x+1)-f(x))+\beta(g(x+1)-g(x))\\ &= \alpha\Delta(f)+\beta\Delta(g). \quad\square\end{aligned}$$

4.2. *设 $p_n = x(x+1)\cdots(x+n)$. 计算 $\Delta(p_n)$.*

$$\Delta(p_n) = (x+1)\cdots(x+n)(x+n+1)-x(x+1)\cdots(x+n) = (n+1)(x+1)\cdots(x+n).$$

4.3. *确定 $\ker(\Delta)$ 和 $\mathrm{im}(\Delta)$.*

解. 设 $\Delta(f)=0$, 其中 $f=f_n x^n+f_{n-1}x^{n-1}+\cdots+f_1 x+f_0$, $f_i\in\mathbb{C}[x]$, $n>0$ 且 $f_n\neq 0$.

$\Delta(f)=f_n(x+1)^n+f_{n-1}(x+1)^{n-1}+\cdots+f_1(x+1)+f_0-(f_n x^n+f_{n-1}x^{n-1}+\cdots+f_1 x+f_0)$.

于是 $\Delta(f)$ 中关于 x^{n-1} 的系数是 $nf_n\neq 0$. 于是 $\Delta(f)=0$. 由此可知, $\ker(\Delta)=\mathbb{C}$.

由上述计算可知, 对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 存在 $g_n\in \mathrm{im}(\Delta)$ 满足 $\deg(g_n)=n$. 因为 $g_0,g_1,\ldots,g_{n-1}$ 线性无关(见第一章第一次习题课例 2.1) 且 $g_0,g_1,\ldots,g_{n-1}\in\mathbb{C}[x]^{(n)}$ 和 $\dim\mathbb{C}[x]^{(n)}=n$. 于是, $g_0,g_1,\ldots,g_{n-1}$ 是 $\mathbb{C}[x]^{(n)}$ 的一组基. 于是, 对任意 $n\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{C}[x]^{(n)}=\langle g_0,g_1,\ldots,g_{n-1}\rangle\subset \mathrm{im}(\Delta),\quad (\because g_0,g_1,\ldots,g_{n-1}\in \mathrm{im}(\Delta).)$$

由此得出 $\mathrm{im}(\Delta)=\mathbb{C}[x]$.

5. 设域 F 含有无穷多个元素. 则 F 上有限维线性空间 V 不是有限多个真子空间的并.

证明. 假设结论不成立. 则设 $V_1,\ldots,V_k$ 是 V 的真子空间使得

$$V=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_k.$$

不妨进一步假设 k 是使得上式成立的最小的正整数. 则 $k>1$ 且

$$V_i\subsetneq V_1\cup\cdots\cup V_{i-1}\cup V_{i+1}\cup\cdots\cup V_k,\quad i=1,2,\ldots,k.$$

取 $\mathbf{v}_1\in V_1\setminus V_2$ 和 $\mathbf{v}_2\in(V_2\setminus V_1\cup V_3\cup\cdots\cup V_k)$. 因为 $\mathrm{card}(F)=\infty$, 所以

$$\{\lambda\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\,|\,\lambda\in F\setminus\{0\}\}$$

是无穷集. 由鸽笼原理(pigeon hole principle)存在 $\lambda_1,\lambda_2\in F\setminus\{0\}$, 其中 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 和存在 $i\in\{1,2,\ldots,k\}$ 使得 $\lambda_1\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2,\lambda_2\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\in V_i$. 如果 $i=1$, 则

$$\lambda_1\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\in V_1\implies \mathbf{v}_2\in V_1.$$

与 $\mathbf{v}_2$ 的选择矛盾. 如果 $i=2$, 则

$$\lambda_1\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\in V_2\implies\lambda_1\mathbf{v}_1\in V_2\implies\mathbf{v}_1\in V_2.$$

与 $\mathbf{v}_1$ 的选择矛盾. 如果 $i>2$, 则

$$\lambda_2(\lambda_1\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)-\lambda_1(\lambda_2\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=(\lambda_2-\lambda_1)\mathbf{v}_2\in V_i\implies\mathbf{v}_2\in V_i.$$

与 $\mathbf{v}_2$ 的选择矛盾. □

上述习题也可以从对偶的观点证明. 具体证明见本讲义的附录.

注解 1.1 *若 F 有限. 则 F^n 有限. 取 F^n 中每个非零向量生成的一维子空间, 它们的并显然是 F^n.*

§2　基变换和坐标变换

例 2.1 *($\mathbb{R}^2$ 中的坐标旋转)* 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的标准基. 把该基底逆时针旋转 θ 得到另一组基 ϵ_1, ϵ_2. 则

$$(\epsilon_1, \epsilon_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{A}.$$

直接计算得 $A = A^t$. 设 $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = y_1\epsilon_1 + y_2\epsilon_2$. 则

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

例 2.2 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 设

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) 证明 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ 和 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的两组基.

(ii) 求从 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ 到 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 转换矩阵.

解. *(i)* 设 $A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ 和 $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. 直接计算得 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = 3$. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ 和 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的两组基.

(ii) 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基. 则

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)A \quad \text{和} \quad (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)B.$$

于是

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)A^{-1}B.$$

转换矩阵是

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 2.3 在 $\mathbb{C}[x]^{(d)}$ 中, 设 $p_1 = (x+\alpha_1)^{d-1}, \ldots, p_d = (x+\alpha_d)^{d-1}$, 其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C}$, 两两不同. 证明 $p_1, \ldots, p_d$ 是 $F[x]^{(d)}$ 的一组基, 并求从 $1, x, \ldots, x^{d-1}$ 到 $p_1, p_2, \ldots, p_d$ 的转换矩阵.

证明. 由二项式定理可知,

$$(x+\alpha)^{d-1}=\sum_{i=0}^{d-1}\binom{d-1}{i}x^i\alpha^{d-1-i}=(1,x,\dots,x^{d-1})\begin{pmatrix}\binom{d-1}{d-1}\alpha^{d-1}\\ \binom{d-1}{d-2}\alpha^{d-2}\\ \vdots\\ \binom{d-1}{0}\alpha^{0}\end{pmatrix}.$$

于是

$$(p_1,p_2,\dots p_n)=(1,x,\dots,x^{d-1})\underbrace{\begin{pmatrix}\binom{d-1}{d-1}\alpha_1^{d-1} & \binom{d-1}{d-1}\alpha_2^{d-1} & \cdots & \binom{d-1}{d-1}\alpha_d^{d-1}\\ \binom{d-1}{d-2}\alpha_1^{d-2} & \binom{d-1}{d-2}\alpha_2^{d-2} & \cdots & \binom{d-1}{d-2}\alpha_d^{d-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \binom{d-1}{0}\alpha_1^{0} & \binom{d-1}{0}\alpha_2^{0} & \cdots & \binom{d-1}{0}\alpha_d^{0}\end{pmatrix}}_{A}.$$

而

$$\det(A)=\binom{d-1}{d-1}\binom{d-1}{d-2}\cdots\binom{d-1}{0}\det\begin{pmatrix}\alpha_1^{d-1} & \alpha_2^{d-1} & \cdots & \alpha_d^{d-1}\\ \alpha_1^{d-2} & \alpha_2^{d-2} & \cdots & \alpha_d^{d-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_1^{0} & \alpha_2^{0} & \cdots & \alpha_d^{0}\end{pmatrix}\neq 0.$$

于是 $p_1,p_2,\dots,p_d$ 是 $F[x]^{(d)}$ 的一组基, A 是所求的转换矩阵.

§3 对偶空间

例 3.1 设 $V=\mathbb{R}[x]^{(n)}$. 对 $i=0,1,\dots,n$, 定义:

$$\begin{array}{rccc}\psi_i: & V & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & f & \mapsto & \frac{1}{i!}\frac{d^if}{dx^i}(0)\end{array}.$$

证明 $\psi_0,\dots,\psi_{n-1}$ 是 $1,x,\dots,x^{n-1}$ 的一组对偶基.

证明. 先验证 $\psi_i\in V^*$. 注意到 $d/dx\in\mathrm{Hom}(V,V)$, 而赋值同态 $\phi_0\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}[x],\mathbb{R})$, 其中 $\phi_0(f)=f(0)$. 而

$$\psi_i=\frac{1}{i!}\phi_0\circ\underbrace{\frac{d}{dx}\circ\cdots\circ\frac{d}{dx}}_{i}.$$

于是 $\psi_i\in V^*$. 由讲义中定理 *5.2* 的证明可知, 我们只需验证 $\psi_i(x^j)=\delta_{i,j}$, $i,j\in\{0,1,\dots,n-1\}$ 即可. 当 $j<i$ 时, $\psi_i(x^j)=0$. 这是因为 x^j 的 i 阶导数恒等于零. 当 $j>i$ 时, $\psi_i(x_j)=\phi_0(\alpha_{i,j}x^{j-i})=0$, 其中 $\alpha_{i,j}$ 是某个有理数. 当 $j=i$ 时, $\psi_i(x^i)=\phi_0(1)=1$. 验证完毕. □

注意到 ψ_i 是取 f 中关于 x^i 得到系数. 作为应用我们计算

$$p=((x+1)^{100}-(2x^2+2x-3)^{10})^2$$

中 x 的系数.

$$p'=2((x+1)^{100}-(2x^2+2x-3)^{10})(100(x+1)^{99}-10(2x^2+2x-3)^9(4x+2)).$$

$$p'(0)=4\times(1-3^{10})(100+10\times 3^9)=40(1-3^{10})(10+3^9)=-46513290560.$$

§4 附录: 第一次作业中第五题另解

下面我们用对偶的观点来证明本章第一次作业的第五题.

引理 4.1 设域 F 含有无穷多个元素, $f\in F[x_1,\dots,x_n]$. 如果对于任意的 $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in F$,

$$f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0,$$

则 $f(x_1,\dots,x_n)=0$.

证明. 对 n 归纳. 当 $n=1$ 时, $f(\alpha)=0$ 对 F 中所有元素 α 成立. 因为 f 在 F 中有无穷多个根, 所以 $f=0$. 设 $n>1$ 且结论对 $(n-1)$ 元多项式成立.

考虑 n 元情形. 如果 x_n 不出现在 f 中, 则结论由归纳假设直接得出. 假设 $\deg_{x_n}(f)=d>0$. 则

$$f=f_d x_n^d+f_{d-1}x_n^{d-1}+\cdots+f_0,$$

其中 $f_d,f_{d-1},\dots,f_0\in F[x_1,\dots,x_{n-1}]$ 且 $f_d\neq 0$. 由归纳假设, 存在 $\beta_1,\dots,\beta_{n-1}\in F$ 使得 $f_d(\beta_1,\dots,\beta_{n-1})\neq 0$. 于是

$$\begin{aligned}f(\beta_1,\dots,\beta_{n-1},x_n)=&f_d(\beta_1,\dots,\beta_{n-1})x_n^d+f_{d-1}(\beta_1,\dots,\beta_{n-1})x_n^{d-1}\\&+\cdots+f_0(\beta_1,\dots,\beta_{n-1})\in F[x_n]\setminus\{0\}.\end{aligned}$$

从而存在 $\beta_n\in F$ 使得 $f(\beta_1,\dots,\beta_{n-1},\beta_n)\neq 0$. 矛盾. 于是 x_n 不出现在 f 中. □

引理 4.2 设 V 是 n 维线性空间, U 是 V 的 $n-1$ 维子空间. 则存在 $f\in V^*$ 使得 $U=\ker(f)$.

证明. 设 $\pi: V\longrightarrow V/U$ 是商映射. 因为 $\dim(V/U)=1$ (见第一章第二次讲义引理 4.14), 所以存在 $\phi: V/U\longrightarrow F$ 是线性同构(见第一章第二次讲义定理 4.13). 则 $f=\phi\circ\pi\in V^*$.

我们验证 $U=\ker(\phi)$. 设 $\mathbf{u}\in U$. 则 $\pi(\mathbf{u})=\mathbf{u}+U=U$ 是 V/U 中的零元. 因为 $\phi(U)=0$, 所以 $f(\mathbf{u})=0$. 我们有 $\mathbf{u}\in\ker(f)$. 由此得出 $U\subset\ker(f)$. 反之, 设 $\mathbf{v}\in\ker(f)$.

$$0=f(\mathbf{v})=\phi(\mathbf{v}+U).$$

因为 ϕ 是单线性映射, 所以 $\mathbf{v}+U=U$, 即 $\mathbf{v}\in U$. 由此可知 $\ker(f)\subset U$. □

最后, 我们来证明第五题的结论. 假设

$$V=U_1\cup\cdots\cup U_k,$$

其中 $U_1,\ldots,U_k$ 是 V 的真子空间. 我们不妨设每个 U_i 的维数都是 $n-1$. 这是因为一个真子空间一定包含于一个 $n-1$ 维子空间中. 由引理 4.2, 存在 $f_1,\ldots f_k\in V^*$ 使得

$$\begin{array}{ccccccc} V & = & \ker(f_1) & \cup & \cdots & \cup & \ker(f_k) \\ & & \| & & & & \| \\ & & U_1 & & & & U_k. \end{array}$$

令 $f=f_1\cdots f_k$. 则 $f:V\longrightarrow F$ 由公式 $f(\mathbf{v})=f_1(\mathbf{v})\cdots f_k(\mathbf{v})$, 其中 $\mathbf{v}$ 是 V 中任意向量. 由上式可知存在 $i\in\{1,2,\ldots,k\}$ 使得 $\mathbf{v}\in\ker(f_i)$. 于是 $f_i(\mathbf{v})=0$. 从而 $f(\mathbf{v})=0$, 即 f 是零函数.

设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是一组基, $\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\cdots\alpha_n\mathbf{e}_n$, 其中 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in F$. 再设 $a_{i,j}=f_i(\mathbf{e}_j)$, $i\in\{1,\ldots,k\}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$ 则 $f_i(\mathbf{v})=a_{i,1}\alpha_1+\cdots+a_{i,n}\alpha_n$. 于是对任意 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in F$,

$$f(\mathbf{v})=\prod_{i=1}^{k}f_i(\mathbf{v})=\prod_{i=1}^{k}(a_{i,1}\alpha_1+\cdots+a_{i,n}\alpha_n)=0.$$

令 g 等于多项式 $\prod_{i=1}^{k}(a_{i,1}x_1+\cdots+a_{i,n}x_n)\in F[x_1,\ldots,x_n]$. 则对任意 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in F$, $g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=f(\mathbf{v})=0$. 由引理 4.1 可知, $g=0$. 因为 $F[x_1,\ldots,x_n]$ 是整环, 所以 $\prod_{i=1}^{k}(a_{i,1}x_1+\cdots+a_{i,n}x_n)$ 中某个因子等于零. 不妨设

$$a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,n}x_n=0.$$

则 $a_{1,1}=\cdots=a_{1,n}=0$, 即 $f_1=0^*$. 于是 $\ker(f_1)=V=U_1$. 即 $\dim(U_1)=n$. 矛盾. □