第五周习题课

§1　关于习题

1. 设 $\mathbb{Q}^3$ 中的三个向量

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

计算 $V := \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ 的一组基 和 $\mathbb{Q}^3/V$ 的一组基.
解. 设 $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. 因为 $\mathrm{rank}(A) = 2$ 且 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 线性无关, 所以 V 的一组基是 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.
把 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 扩充成 $\mathbb{Q}^3$ 的一组基:

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

则 $\mathbb{Q}^3/V$ 的一组基是 $\mathbf{u} + V$. (见第一章第二讲引理 4.14 的证明) □

4. 设 p 是素数, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Z}_p$, 不全为零, V 是 $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ 在 $\mathbb{Z}_p^n$ 中的解空间. 计算 $\dim(V)$ 和 $\mathrm{card}(V)$.
解. 方程的系数矩阵是 $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. 因为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 不全为零, 所以 $\mathrm{rank}(A) = 1$.
于是 $\dim(V) = n - 1$. 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ 是 V 的一组基. 则

$$V = \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} | \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{Z}_p\}.$$

由坐标的唯一性可知 $\mathrm{card}(V) = p^{n-1}$. □

5. 在矩阵空间 $\mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ 中. 设 $\mathrm{Mag}_2(\mathbb{Q})$ 是二阶幻方构成的子空间, U 和 V 分别是由

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

生成的子空间. 计算 $\dim(\mathrm{Mag}_2(\mathbb{Q}))$ 并确定 $\mathrm{Mag}_2(\mathbb{Q}) + U + V$ 是不是直和.

解. 矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mag}_2(\mathbb{Q}) \Longleftrightarrow \begin{cases} c + d = a + b \\ a + c = a + b \\ b + d = a + b \\ a + d = a + b \\ b + c = a + b \end{cases} \Longleftrightarrow a = b = c = d.$$

于是 $\dim(\mathrm{Mag}_2(\mathbb{Q}))=1$. 进而 $\mathrm{Mag}_2(\mathbb{Q})$ 的基是

$$S_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

因为

$$S_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

所以 $\mathrm{Mag}_2(\mathbb{Q})\cap(U+V)\neq\{O\}$. 故 $\mathrm{Mag}_2(\mathbb{Q})+U+V$ 不是直和. □

5. 设 V 是域 F 上的 n 维子空间, $V_1,\dots,V_k$ 是 V 的子空间. 证明: 如果

$$\dim V_1+\cdots+\dim V_k>n(k-1),$$

则 $V_1\cap\cdots\cap V_k\neq\{\mathbf{0}\}$.

证明. 先证明存在 $(k-1)$ 个子空间 $W_1,\dots,W_{k-1}$ 使得

$$\dim(V_1)+\cdots+\dim(V_k)=\dim(W_1)+\cdots+\dim(W_{k-1})+\dim(V_1\cap\cdots\cap V_k).\tag{1}$$

对 k 归纳. 当 $k=1$ 时, 显然. 设 $k>1$ 且 (1) 对 $(k-1)$ 个子空间成立. 则存在子空间 $W_1,\dots,W_{k-1}$ 使得

$$\dim(V_1)+\cdots+\dim(V_{k-2})+\dim(V_{k-1})=\dim(W_1)+\cdots+\dim(W_{k-1})+\dim(V_1\cap\cdots\cap V_{k-1}).$$

于是

$$\begin{aligned}&\dim(V_1)+\cdots+\dim(V_{k-2})+\dim(V_{k-1})+\dim(V_k)\\&=\dim(W_1)+\cdots+\dim(W_{k-1})+\dim(V_k)+\dim(V_1\cap\cdots\cap V_{k-1})\\&=\dim(W_1)+\cdots+\dim(W_{k-1})+\dim(\underbrace{V_k+V_1\cap\cdots\cap V_{k-1}}_{W_k})+\dim(V_1\cap\cdots\cap V_{k-1}\cap V_k)\end{aligned}$$

(对 V_k 和 $V_1\cap\cdots\cap V_{k-1}$ 用维数公式).

于是, (1) 成立. 因为 $\dim(W_i)\leq n$, $i=1,2,\dots k$, 所以 (1) 蕴含着

$$n(k-1)<n(k-1)+\dim(V_1\cap\cdots\cap V_k).$$

从而 $\dim(V_1\cap\cdots\cap V_k)>0$. 进而, $V_1\cap\cdots\cap V_k\neq\{\mathbf{0}\}$. □

另一个证明. 不妨设 $k>1$. 考虑线性映射

$$\begin{aligned}\phi:\ V_1\times V_2\times\cdots\times V_k&\longrightarrow\underbrace{V\times\cdots\times V}_{k-1}\\(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_k)&\mapsto(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_k,\dots,\mathbf{v}_{k-1}-\mathbf{v}_k).\end{aligned}$$

可直接验证 ϕ 是线性的. 注意到由第一章第二次习题课例 3.1 可直接推导出

$$\dim(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k) = \dim(V_1) + \cdots + \dim(V_k).$$

由第一章第二讲命题 4.15 (iii),

$$\dim(\ker(\phi)) \geq \dim(V_1\times V_2\times\cdots\times V_k) - \dim(\underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-1}) \geq \dim(V_1)+\cdots+\dim(V_k)-(k-1)n > 0.$$

于是, 存在非零向量 $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k) \in \ker(\phi)$. 由 ϕ 的定义, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_k$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. 即 $\mathbf{v}_k \in V_i$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, 且 $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$. 特别地 $\mathbf{v}_k \in V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_k$. □

§2 双线性型的矩阵和秩

例 2.1 设双线性型

$$\begin{array}{cccc} f: & F^3 \times F^3 & \longrightarrow & F \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} & \mapsto & 5x_1y_2 - 3x_3y_1 + x_3y_3. \end{array}$$

求 f 在标准基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 下的矩阵和 $\mathrm{rank}(f)$.

解. 设 $A = (a_{i,j})_{3\times 3}$ 是所求矩阵. 注意到 $a_{i,j} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, 即 $a_{i,j}$ 是 f 的表达式中 x_iy_j 的系数. 于是

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的秩等于 2.

§3 行列相伴变换

设 $F_{i,j}$ 是 n 阶第一类初等矩阵, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $F_{i,j}(\lambda)$ 是第二类初等矩阵, 其中 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, $\lambda \in F$.

引理 3.1 设 $A=(a_{k,\ell})\in \mathrm{SM}_n(F)$, $B=F_{i,j}^tAF_{i,j}$ 是对称矩阵且

$$B=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{1,1}} & & \downarrow^{i} & & \downarrow^{j} & & \phantom{a_{1,n}}\end{array}\\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{j,1} & \cdots & \underline{a_{j,j}} & \cdots & a_{j,i} & \cdots & a_{j,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & \underline{a_{i,i}} & \cdots & a_{i,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \to i\\ \\ \to j\\ \\ \\ \end{array}\end{array}.$$

证明. 因为 $F_{i,j}$ 对称, 所以 $B\sim_c A$. 由 A 对称得出 B 对称. 由初等行变换可知 $F_{i,j}A$ 仅仅置换 A 的第 i 和第 j 行. 再由初等列变换可知 $(F_{i,j}A)F_{i,j}$ 仅仅置换 $F_{i,j}A$ 的第 i 和第 j 列. 从而, $B=F_{i,j}AF_{i,j}$. $\square$

引理 3.2 设 $A=(a_{k,\ell})\in \mathrm{SM}_n(F)$, $B=F_{i,j}(\lambda)^tAF_{i,j}(\lambda)$ 是对称矩阵且

$$B=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{j,1}+\lambda a_{i,1}} & & \downarrow^{i} & & \downarrow^{j} & & \phantom{a_{j,n}+\lambda a_{i,n}}\end{array}\\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,j}+\lambda a_{1,i} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} & \cdots & \underline{a_{i,j}+\lambda a_{i,i}} & \cdots & a_{j,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{j,1}+\lambda a_{i,1} & \cdots & \underline{a_{j,i}+\lambda a_{i,i}} & \cdots & \boxed{a_{j,j}+2\lambda a_{i,j}+\lambda^2 a_{i,i}} & \cdots & a_{j,n}+\lambda a_{i,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,j}+\lambda a_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \to i\\ \\ \to j\\ \\ \\ \end{array}\end{array}.$$

证明. 矩阵 B 显然对称. 由初等行变换可知 $F_{i,j}^t(\lambda)A$ 仅仅把 A 的第 i 行通乘 λ 后加到第 j 行上. 再由初等列变换可知 $(F_{i,j}(\lambda)^tA)F_{i,j}(\lambda)$ 仅仅把 A 的第 i 列通乘 λ 后加到第 j 列上. 从而, $B=F_{i,j}(\lambda)^tAF_{i,j}(\lambda)$. $\square$

对对称矩阵做有限次上述两个引理中的操作得到的矩阵称为通过(初等)行列相伴变换得到的矩阵.

引理 3.3 设域 F 的特征不等于 2, $A\in \mathrm{SM}_n(F)$. 如果 A 中对角线上元素都等于零但 $A\neq O$, 则我们可以通过行列相伴变换把 A 变成对称矩阵 $B=(b_{i,j})$ 使得 $b_{1,1}\neq 0$. 特别地, $A\sim_c B$.

证明. 设 $A=(a_{k,\ell})_{n\times n}$, 其中某个 $a_{i,j}\neq 0$, 且 $i\neq j$. 则 $F_{i,j}(1)^tAF_{i,j}(1)$ 在第 j 行 j 列处的元素是

$$a_{j,j}+2a_{i,j}+a_{i,i}=2a_{i,j}\neq 0.$$

这是因为引理 3.2 和 $2 \neq 0$. 根据引理 3.1, $B = F_{1,j}(F_{i,j}(1)^t A F_{i,j}(1))F_{1,j}$. □

定理 3.4 设域 F 的特征不等于 2, $A \in \mathrm{SM}_n(F)$. 则我们可以通过初等行伴列变换得到对角矩阵.

证明. 我们对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, A 是对角阵. 定理显然成立. 设 $n > 1$ 且定理对 $n-1$ 成立. 我们考虑 n 阶对称矩阵 A. 如果 $A = O$, 则 A 已经是对角矩阵. 下面设 $A = (a_{i,j}) \neq O$.

由引理 3.3, 我们可以进一步假设 $a_{1,1} \neq 0$. 由引理 3.2,

$$F_{1,n}\left(-\frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}\right)^t \cdots F_{1,2}\left(-\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}\right)^t A \underbrace{F_{1,2}\left(-\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}\right) \cdots F_{1,n}\left(-\frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}\right)}_{M} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & B \end{pmatrix}.$$

其中 $B \in \mathrm{SM}_{n-1}(F)$. 由归纳假设存在 $Q \in \mathrm{GL}_n(F)$ 是第一类和第二类初等矩阵之积使得 $Q^t B Q$ 是对角矩阵. 令

$$P = \begin{pmatrix} 1 & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & Q \end{pmatrix}.$$

则 $(MP)^t A (MP)$ 是对角阵. □

例 3.5 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_3(\mathbb{R}).$$

利用行列相伴变换把 A 化成对角阵 B, 并计算 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 使得 $B = P^t A P$.

解.

$$(A|E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{把第2行加到第1行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{对称操作}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第1行通乘 } -\frac{1}{2} \text{ 加到第2行}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & | & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{对称操作}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & | & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第1行通乘 } -1 \text{ 加到第3行}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & | & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{对称操作}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & | & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

设

$$P=\begin{pmatrix}1 & \frac{-1}{2} & -1\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow P^tAP=\operatorname{diag}\left(2,-\frac{1}{2},-2\right).$$

§4 非退化双线性型矩阵

设 $\dim(V)=n$, $f\in\mathcal{L}_2(V)$. 如果 $\operatorname{rank}(f)=n$, 则称 f 是非退化的.

例 4.1 设 V 是 F 上的有限维向量空间, $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 是 V 上非退化双线性型. 则

$$\begin{array}{rccc}\phi: & V & \longrightarrow & V^*\\ & \mathbf{v} & \mapsto & f(\mathbf{x},\mathbf{v})\end{array}$$

是线性同构.

证明. 因为 f 双线性, 所以固定 $\mathbf{v}$ 后 $f(\mathbf{x},\mathbf{v})\in V^*$. 设 $\alpha_1,\alpha_2\in F$ 和 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in V$. 则

$$\phi(\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2)=f(\mathbf{x},\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2)=\alpha_1 f(\mathbf{x},\mathbf{v}_1)+\alpha_2 f(\mathbf{x},\mathbf{v}_2)=\alpha_1\phi(\mathbf{v}_1)+\alpha_2\phi(\mathbf{v}_2).$$

于是 ϕ 是线性映射. 因为 $\dim(V)=\dim(V^*)$, 所以我们只要证明 f 是单射即可. 设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, A 是 f 在该基下的矩阵. 设 $\mathbf{v}=\lambda_1\mathbf{e}_1+\cdots+\lambda_n\mathbf{e}_n$. 则对任意的 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n\in V$, 我们有

$$f(\mathbf{x},\mathbf{v})=(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}.$$

设 $\phi(\mathbf{v})=\mathbf{0}^*$. 则由上式可知 对任意 $x_1,\ldots,x_n\in F$,

$$(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=0.$$

于是

$$A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

因为 A 满秩, 所以 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. 于是 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$. 由第一章第一讲命题 *2.3*, ϕ 是单射.
□