第六周习题课

§1　关于习题

5. 设 V 是 F 上的有限维线性空间, $f, g \in V^* \setminus \{\mathbf{0}^*\}$. 证明: $\ker(f) = \ker(g)$ 当且仅当存在 $\lambda \in F$ 使得 $f = \lambda g$.

证明. 设 $f = \lambda g$. 因为 f 和 g 都不等于 $\mathbf{0}^*$, 所以 $\lambda \neq 0$. 于是, 对任意 $\mathbf{v} \in V$, $f(\mathbf{v}) = 0 \Longleftrightarrow g(\mathbf{v}) = 0$. 由此可知 $\ker(f) = \ker(g)$.

反之, 设 $\ker(f) = \ker(g)$. 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 则存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in F$ 使得对任意 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$,

$$f(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \quad \text{和} \quad g(\mathbf{x}) = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n.$$

设 V_f 和 V_g 分别是方程 $\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n = 0$ 和 $\beta_1 z_1 + \cdots + \beta_n z_n = 0$ 在 F^n 解空间. 因为 $\operatorname{rank}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$, 所以 $\dim(V_f) = n - 1$ (方程版的对偶定理). 则

$$\mathbf{x} \in \ker(f) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V_f \quad \text{和} \quad \mathbf{x} \in \ker(f) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V_g.$$

因为 $\ker(f) = \ker(g)$, 所以 $V_f = V_g$. 于是, $V_f = V_f \cap V_g$ 是方程组

$$\begin{cases} \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n = 0 \\ \beta_1 z_1 + \cdots + \beta_n z_n = 0 \end{cases}$$

的解空间. 因为 $\dim(V_f) = n - 1$, 所以上述齐次方程组的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$$

的秩等于 1. 于是 A 的两行线性相关. 因为这两行都非零, 所以存在 $\lambda \in F$ 使得

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \lambda(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

于是对任意 $x_1, \ldots, x_n \in F$

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \lambda(\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n) \Longrightarrow f(\mathbf{x}) = \lambda g(\mathbf{x}). \quad \square$$

“反之” 部分的另一个证明.

引理 1.1 *设 $\dim(V) = n$, $f \in V^* \setminus \{\mathbf{0}^*\}$. 则 f 是满射且 $\dim(\ker(f)) = n - 1$.*

证明. 因为 $f \neq \mathbf{0}^*$, 所以存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $f(\mathbf{v}) = \alpha \in F \setminus \{0\}$. 对任意 $\beta \in F$, $f(\beta\alpha^{-1}\mathbf{v}) = \beta\alpha^{-1}\alpha = \beta$. 于是 f 是满射. 因为 $\mathrm{im}(f) = F$, 所以 $\dim(\mathrm{im}(f)) = 1$. 于是 $\dim(\ker(f)) = n-1$ (对偶定理的线性映射版). □

由上述引理, 我们可设 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-1}$ 是 $\ker(f)$ 的基, 它也是 $\ker(g)$ 的基. 由基扩充定理 V 有基底 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-1}, \epsilon_n$. 于是 $f(\epsilon_n) = \alpha \in F \setminus \{\mathbf{0}\}$. 且 $g(\epsilon_n) = \beta \in F \setminus \{0\}$. 令 $h = f - \alpha\beta^{-1}g$. 则 $h(\epsilon_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, 这是因为 $\epsilon_i \in \ker(f) = \ker(g)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. 而

$$h(\epsilon_n) = f(\epsilon_n) - \alpha\beta^{-1}g(\epsilon_n) = \alpha - \alpha\beta^{-1}\beta = 0.$$

由第一章第二讲定理 4.12 (线性映射基本定理II) 可知 $h = \mathbf{0}^*$. 于是 $f = (\alpha\beta^{-1})g$. □

6. 设 V 是 F 上的 n 维线性空间, U 是 V 的 d 维子空间. 设

$$U^0 = \{f \in V^* \,|\, \forall\ \mathbf{u} \in U,\ f(\mathbf{u}) = 0\}.$$

证明: $\dim(U^0) = n - d$.

证明. 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ 是 U 的一组基. 由基扩充定理, V 有一组基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$. 设 $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_d^*, \mathbf{e}_{d+1}^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 是其对偶基. 则 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = 0$, $i \in \{d+1, d+2, \ldots, n\}$, $j \in \{1,,2,\ldots,d\}$. 因为 $U = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d \rangle$, 所以 $\mathbf{e}_{d+1}^*, \ldots, \mathbf{e}_n^* \in U^0$.

设 $f = \alpha_1\mathbf{e}_1^* + \cdots + \alpha_d\mathbf{e}_d^* + \alpha_{d+1}\mathbf{e}_{d+1}^* + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n^* \in V$, 其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_d, \alpha_{d+1}, \ldots, \alpha_n \in F$. 如果 $f \in U^0$, 则对任意 $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, $f(\mathbf{e}_i) = 0$, 即

$$0 = f(\mathbf{e}_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{e}_k^*(\mathbf{e}_i) = \alpha_i.$$

由此得出, $f \in \langle \mathbf{e}_{d+1}^*, \ldots, \mathbf{e}_n^* \rangle$. 于是 $U^0 = \langle \mathbf{e}_{d+1}^*, \ldots, \mathbf{e}_n^* \rangle$. 从而 $\dim U^0 = n - d$. □

注解 1.2 第 5 题"反之"部分的又一证明. *设 $U = \ker(f)$. 由引理 1.1, $\dim(U) = n-1$. 于是 $\dim(U^0) = 1$ (第 6 题的结论). 又因为 $U = \ker(g)$, 所以 $f, g \in U^0$. 于是 g 是 U^0 的基. 从而存在 $\lambda \in F$ 使得 $f = \lambda g$.* □

§2 关于二次型的计算

约定. 设 F 是特征不等于 2 的域, $p(x_1, \ldots, x_n) \in F[x_1, \ldots, x_n]$ 是齐二次的. 我们说 p 是 F^n 上的二次型, 是指 $p : F^n \longrightarrow F$ 由公式 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^t \mapsto p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 给出.

例 2.1 *计算 $\mathbb{R}^3$ 上二次型 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的一组规范基和在该基下的规范型, 并计算 q 的签名.*

解. 二次型 q 在标准基下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\\1&1&-3\end{pmatrix}.$$

利用初等列伴行变换得

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\-1&0&1&0&1&0\\1&1&-3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-----------]{\text{第}1\text{行加到第}2\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\1&1&-3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[----]{\text{对称操作}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\1&2&-3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-----------]{\text{第}1\text{行通乘 }-1\text{ 加到第}3\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\0&2&-4&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[----]{\text{对称操作}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\0&2&-4&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-----------]{\text{第}2\text{行通乘 }2\text{ 加到第}3\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\0&0&0&1&2&1\end{array}\right)\xrightarrow[----]{\text{对称操作}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-1&0&1&1&0\\0&0&0&1&2&1\end{array}\right).$$

设

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

则 $P^tAP=\mathrm{diag}(1,-1,0)$. 于是 q 在 $\vec{P}^{(1)},\vec{P}^{(2)},\vec{P}^{(3)}$ 下的矩阵是 $\mathrm{diag}(1,-1,0)$. 设 $\mathbf{y}=y_1\vec{P}^{(1)}+y_2\vec{P}^{(2)}+y_3\vec{P}^{(3)}$. 则

$$q(\mathbf{y})=y_1^2-y_2^2.$$

q 的签名是 $(1,1)$. □

另解.

$$\begin{aligned}q&=x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3\\&=(x_1-x_2+x_3)^2-x_2^2-4x_3^2+4x_2x_3\\&=(x_1-x_2+x_3)^2-(x_2-2x_3)^2.\end{aligned}$$

设

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

则 $q = y_1^2 - y_2^2$. 而规范基是 Q^{-1} 的列向量, 其中

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

q 的签名是 $(1,1)$. $\square$

例 2.2 计算 $\mathbb{R}^n$ 上二次型 $p_n = \sum_{1\le i<j\le n} 2x_i x_j$. 的签名.

解. p_n 在标准基下的矩阵

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

当 $n = 2$ 时,

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{第}1\text{行加到第}2\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{对称操作}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{第}1\text{行通乘 } -1/2 \text{ 加到第}2\text{行}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{对称操作}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

签名是 $(1,1)$.

当 $n = 3$ 时, 由上周大课和习题课的讲义可知, 签名是 $(1,2)$.

现在考虑一般情形. $A_n \to$

$$\xrightarrow{\text{第}1\text{行加到第}2\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{对称操作}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第}1\text{行通乘 }-1/2\text{ 加到第}2\text{行}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{对称操作}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第}1\text{行通乘 }-1\text{ 加到第}3\text{行}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{对称操作}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

于是

$$A_n \sim_c \begin{pmatrix} M & O \\ O & N \end{pmatrix},$$

其中

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad N = -\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}.$$

注意到 $\det(N) = (-2 + (n-3)(-1))(-1)^{n-3} = (1-n)(-1)^{n-3}$, $n = 3, 4, \ldots.$ (见上学期讲义第十二讲第 6 页的例子).

设 Δ_i 是 N 的 i 阶主子式, $i=1,2,\ldots,n-2$. 且 $\Delta_0=1$. 则 $\Delta_{i+1}/\Delta_i<0$, $i=1,2,\ldots,n-2$. 由 *Jacobi* 公式.

$$N \sim_c \operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0},\frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ldots,\frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-3}}\right) \sim_c -E_{n-2}.$$

于是存在 $P\in \mathrm{GL}_n(F)$ 和 $Q\in\mathrm{GL}_{n-2}(F)$ 使得

$$\begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & Q\end{pmatrix}^t P^t A_n P \begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & Q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & Q\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} M & O \\ O & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & Q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2}\end{pmatrix} & O \\ O & -E_{n-2}\end{pmatrix}.$$

由此可知, p_n 的签名是 $(1,n-1)$. $\square$

§3 关于二次型的证明

例 3.1 设 $p\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 非零且齐二次. 证明: p 在 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 可约当且仅当 $\operatorname{rank}(p)\le 2$.

证明. 由大课讲义中例 *8.11* 可知, p 的可约性蕴含 $\operatorname{rank}(p)\le 2$.

反之, 设 $\operatorname{rank}(p)\le 2$. 设 $\operatorname{rank}(p)\le 2$ 且 p 在 $\mathbb{C}^n$ 的标准基下的矩阵为 A. 则由大课讲义例 *7.19* 可知存在 $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得

$$P^tAP=\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O\end{pmatrix},$$

其中 $r=1$ 或 $r=2$. 于是

$$p=(x_1,\ldots x_n)A\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = (x_1,\ldots x_n)(P^{-1})^t\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}.$$

令

$$\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}.$$

则 $p=y_1^2+\cdots+y_r^2$. 当 $r=1$ 时, $p=y_1^2$. 当 $r=2$ 时, $p=(y_1+\sqrt{-1}y_2)(y_1-\sqrt{-1}y_2)$. 由定义 y_1 和 y_2 都是关于 $x_1,\ldots,x_n$ 的一次多项式. 所以 p 在 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 中可约. $\square$