第七周习题课

§1 关于习题

3. 设 F 是域, V 是域 F 上的 n 维线性空间. 设 $f,g\in V^*\setminus\{\mathbf{0}\}$, 而 $h:V\times V\longrightarrow F$ 由公式$\forall\ (\mathbf{x},\mathbf{y})\in V\times V$, $h(\mathbf{x},\mathbf{y})=f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})$ 定义. 验证 h 是双线性型并求 $\mathrm{rank}(h)$.

解. 验证 h 是双线性型的过程略. 因为 $f\neq 0^*$ 和 $g\neq 0^*$, 所以存在 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ 使得 $f(\mathbf{u})\neq 0$ 和 $g(\mathbf{v})\neq 0$. 于是 $h(\mathbf{u},\mathbf{v})\neq 0$. 设 V 的一组基是 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$, $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+\cdots+y_n\mathbf{e}_n$. 则

$$f(\mathbf{x})=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n=(x_1,\ldots,x_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\quad \text{和}\quad g(\mathbf{y})=\beta_1y_1+\cdots+\beta_ny_n=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

于是

$$h(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x_1,\ldots,x_n)\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{A}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

由此可知 $\mathrm{rank}(h)=\mathrm{rank}(A)\leq 1$. 因为 h 非零, 所以 $\mathrm{rank}(h)=1$. $\square$

5. 设 F 是域, V 是域 F 上的 n 维线性空间, $h\in\mathcal{L}_2(V)$ 且 $\mathrm{rank}(h)=1$. 证明: 存在 $f,g\in V^*$, 使得对任意 $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in V\times V$, $h(\mathbf{x},\mathbf{y})=f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})$.

证明. 设 h 在 V 的某组基下的矩阵是 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 的矩阵是 A. 因为 $\mathrm{rank}(A)=1$, 所以存在非零向量 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 使得$A=(\beta_1\mathbf{v},\ldots,\beta_n\mathbf{v})$, 其中 $\beta_1,\ldots,\beta_n\in F$. 设 $\mathbf{v}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^t$. 则

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}(\beta_1,\ldots,\beta_n).$$

对任意的 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n,\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+\cdots+y_n\mathbf{e}_n\in V$, 我们有

$$\begin{aligned}h(\mathbf{x},\mathbf{y})&=(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=(x_1,\ldots,x_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}(\beta_1,\ldots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\\&=\underbrace{(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)}_{f}\underbrace{(\beta_1y_1+\cdots+\beta_ny_n)}_{g}.\quad\square\end{aligned}$$

§2 基本例子

例 2.1 设 $\mathbb{R}^3$ 上的实二次型是

$$q = 2(x_1 - x_2)^2 + 3(x_1 + x_2 + x_3)^2 + 7(x_1 - x_2 + x_3)^2 - (3x_2 - x_1)^2.$$

确定 q 的类型.

解. 令 $y_1 = x_1 - x_2, y_2 = x_1 + x_2 + x_3, y_3 = x_1 - x_2 + x_3, y_4 = 3x_2 - x_1$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

则 $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ 线性无关. 而 $\vec{A}_4$ 是 $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ 的线性组合. 事实上

$$\vec{A}_4 = -\vec{A}_1 + \vec{A}_2 - \vec{A}_3.$$

考虑坐标变换

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vec{A}_2 \\ \vec{A}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

则 $y_4 = -y_1 + y_2 - y_3$. 在新的坐标下,

$$q = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 7y^3 - (y_1 - y_2 + y_3)^2 = y_1^2 + 2y_2^2 + 6y_3^2 + 2y_1y_2 + 2y_2y_3 - 2y_1y_3.$$

q 在新的坐标下的矩阵是

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

B 的三个顺序主子式分别是 $1, 1$ 和 1. 于是 B 正定. $\square$.

例 2.2 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 且 $\det(A) < 0$. 证明存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} < 0$.

证明. 因为 $\det(A) \neq 0$, 所以 A 或者正定, 或者负定, 或者不定. 因为 $\det(A) < 0$, 所以 A 不是正定的. 当 A 负定时, 对 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} < 0$. 设 A 不定. 则存在 $\mathbf{x} \in V$, 使得 $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} < 0$. 否则 A 必然时正定的. $\square$

例 2.3 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 是正定矩阵. 证明 A^2 是正定矩阵.

证明. 因为 A 正定, 所以存在可逆矩阵 P 使得 $A = P^tP$. 于是

$$A^2 = (P^tP)(P^tP) = P^t(PP^t)P \sim_c \underbrace{PP^t}_{Q}.$$

因为 $Q = (P^t)^tP^t$, 所以 Q 正定, 从而 A^2 正定. □

引理 2.4 设 q 是 $\mathbb{R}$ 上有限维线性空间 V 上的二次型. 则 q *(半)*正定当且仅当 $-q$ *(半)*负定. 类似地, 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则 A *(半)*正定当且仅当 $-A$ *(半)*负定.

证明. 设 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. 则

$$q(\mathbf{x}) \geq 0 \iff -q(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{和} \quad q(\mathbf{x}) > 0 \iff -q(\mathbf{x}) < 0. \quad \square$$

例 2.5 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$, $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ 是 A 的顺序主子式. 证明: A 负定当且仅当

$$(-1)^k\Delta_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

证明. 设 $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ 是 $-A$ 的顺序主子式. 则 $\Omega_i = (-1)^i\Delta_i$, $i = 1, 2 \ldots, n$. 由 *Sylvester* 判别法可知 $-A$ 正定当且仅当 $\Omega_1 > 0, \Omega_2 > 0, \ldots, \Omega_n > 0$, 即 $(-1)^k\Delta_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. 由引理 *2.4* 可知, A 负定当且仅当 $(-1)^k\Delta_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. □

§3 分块行列相伴消元

命题 3.1 设 $B \in \mathrm{SM}_{n-1}(F)$ 可逆, $\mathbf{v} \in F^{n-1}$, 且 $a \in F$. 令

$$A = \begin{pmatrix} B & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a \end{pmatrix}.$$

则

(i) 设

$$P = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -B^{-1}\mathbf{v} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

则

$$P^tAP = \begin{pmatrix} B & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & a - \mathbf{v}^tB^{-1}\mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

(ii) $\det(A) = \det(B)(a - \mathbf{v}^tB^{-1}\mathbf{v})$.

(iii) 设 $B \sim_c \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$. 则

$$A \sim_c \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, a - \mathbf{v}^t B^{-1} \mathbf{v}).$$

证明. (i) 注意到 B^{-1} 也是对称矩阵. 我们直接计算得

$$\begin{aligned}
P^t A P &= \begin{pmatrix} E_{n-1} & O_{(n-1)\times 1} \\ -\mathbf{v}^t B^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & -B^{-1}\mathbf{v} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} B & \mathbf{v} \\ O_{1\times(n-1)} & a - \mathbf{v}^t B^{-1}\mathbf{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & -B^{-1}\mathbf{v} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} B & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & a - \mathbf{v}^t B^{-1}\mathbf{v} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(ii) 由 (i) 和 $\det(P) = 1$ 直接推出.

(iii) 设 $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(F)$ 使得 $Q^t B Q = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$. 则

$$C^t \begin{pmatrix} B & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & a - \mathbf{v}^t B^{-1}\mathbf{v} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} Q & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix}}_{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a - \mathbf{v}^t B^{-1}\mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

于是, 由 (i) 可知 (iii) 成立. □

例 3.2 设 $B \in \mathrm{SM}_{n-1}(\mathbb{R})$ 正定, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$, 且 $a \in \mathbb{R}$. 令

$$A = \begin{pmatrix} B & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a \end{pmatrix}.$$

证明*:* 如果 $\det(A) = 0$*,* 则 A 半正定*.*

证明. 因为 B 正定*,* 所以 $B \sim_c E_{n-1}$. 由上述命题 *(iii)* 可知

$$A \sim_c \underbrace{\begin{pmatrix} E_{n-1} & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & \alpha \end{pmatrix}},$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}$. 因为 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(M)$*,* 所以 $\det(M) = 0$*,* 即 $\alpha = 0$. 于是 A 的签名是 $(n-1, 0)$*,* A 半正定*.* □

§4 摄动法

命题 4.1 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 如果 A 的所有主子式都非负, 则 A 半正定.

证明. 设 $t \in \mathbb{R}^+$. 设 $B_i = tE_i + A_i$, 其中 A_i 是 A 中前 i 行和 i 列构成的子矩阵, $i = 1, 2, \ldots, n$. 则

$$\det(B_i) = t^i + \alpha_{i,i-1}t^{i-1} + \cdots + \alpha_{i,1}t + \alpha_{i.0},$$

其中 $\alpha_{i,i-1}, \ldots, \alpha_{i,1}, \alpha_{i,0} \in \mathbb{R}$. 由第一章第二次习题课命题 5.4 可知, 对 $k = 0, 1, \ldots, i-1$,

$$\alpha_{i,k} = (-1)^{i-k} \times -A_i \text{ 的所有 } (i-k) \text{ 阶主子式之和} = A_i \text{ 的所有 } (i-k) \text{ 阶主子式之和}.$$

因为 A_i 的主子式是 A 的主子式, 所以 $\alpha_{i,k} \geq 0$. 因为 $t > 0$, 所以 $\det(B_i) > 0$. 于是, B 的顺序主子式 $\det(B_1), \ldots, \det(B_n)$ 都是正的. 由此可得 $B = tE + A$ 正定 (Sylvester 判别法, 定理 9.18). 对任意 $t \in \mathbb{R}^+, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 我们有

$$\mathbf{x}^t(tE + A)\mathbf{x} \geq 0 \implies t\mathbf{x}^t\mathbf{x} + \mathbf{x}^tA\mathbf{x} \geq 0 \overset{t \to 0^+}{\Longrightarrow} \mathbf{x}^tA\mathbf{x} \geq 0.$$

于是, A 半正定. $\square$.

注解 4.2 上述命题的方法称为"摄动法".

例 4.3 设 F 是任意的域, $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 证明 $A^\vee B^\vee = (BA)^\vee$.
证明. 设 A 和 B 都可逆. 则 $A^\vee = |A|A^{-1}, B^\vee = |B|B^{-1}$.

$$A^\vee B^\vee = |A|A^{-1}|B|B^{-1} = |A||B|A^{-1}B^{-1} = |BA|(BA)^{-1} = (BA)^\vee.$$

设 A 和 B 中至少由一个不可逆. 令 t 是 F 上的未定元. 则 $|tE + A|$ 和 $|tE + B|$ 是 $F[t]$ 中的非零多项式. 于是, $tE + A$ 和 $tE + B$ 是整环 $F[t]$ 的分式域上的可逆矩阵. 由刚刚证明的结论可知

$$(tE + A)^\vee(tE + B)^\vee = ((tE + B)(tE + A))^\vee.$$

注意到上述等式是 n^2 个 $F[t]$ 多项式的等式. 于是, 当把 t 赋值为零时这些等式成立. 而这些等式的构造只涉及多项式的加法和乘法且赋值映射是环同态. 所以我们可以对上述矩阵等式直接赋值得到 $A^\vee B^\vee = (BA)^\vee$. $\square$

§5 Hadamard 乘法(补充内容)

设 $A=(a_{i,j}), B=(b_{i,j})\in F^{m\times n}$. A 和 B 的 *Hadamard* 积 是矩阵 $C=(c_{i,j})\in F^{m\times n}$, 其中 $c_{i,j}=a_{i,j}b_{i,j}$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$. 记 $C=A\odot B$. Hadamard 矩阵乘法也称为 children's product of matrices. 显然 $A\odot B=B\odot A$ 且满足结合律，进而它与矩阵加法满足分配律.

例 5.1 *设 A,B 是 n 阶(半)正定矩阵. 则 $A\odot B$ 也是(半)正定的.*

证明. 因为 A,B 对称, 所以 $A\odot B$ 也对称. 设 $A=(a_{i,j})$ 和 $B=(b_{i,j})$. 因为 B 是(半)正定的, 所以存在矩阵 $M=(m_{i,j})\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $B=M^tM$ (定理 9.16). 于是

$$b_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} m_{k,i}m_{k,j}. \tag{1}$$

设 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^t\in\mathbb{R}^n$. 则

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^t(A\odot B)\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}x_ix_j \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n} m_{k,i}m_{k,j}\right)x_ix_j \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\underbrace{(m_{k,i}x_i)}_{y_{k,i}}\underbrace{(m_{k,j}x_j)}_{y_{k,j}} = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{(y_{k,1},\ldots,y_{k,n})}_{\mathbf{y}_k^t}A\underbrace{(y_{k,1},\ldots,y_{k,n})^t}_{\mathbf{y}_k}.\end{aligned}$$

先设 A 和 B 都半正定. 则 $\mathbf{y}_k^tA\mathbf{y}_k\ge 0$, $k=1,2,\ldots,n$. 于是 $\mathbf{x}^t(A\odot B)\mathbf{x}\ge 0$. 即 $A\odot B$ 半正定. 再设 A 和 B 都正定. 则 M 可逆. 设 $\mathbf{x}\ne\mathbf{0}$. 则不妨设 $x_1\ne 0$. 假设 $\mathbf{y}_k=\mathbf{0}$, $k=1,\ldots,n$, 则 $y_{k,1}=0$, 即 $m_{k,1}x_1=0$. 由此可知 $m_{k,1}=0$, $k=1,2,\ldots,n$. 矩阵 M 不可逆. 矛盾. 于是, 存在 $\ell\in\{1,2,\ldots,n\}$使得 $\mathbf{y}_\ell\ne\mathbf{0}$. 由此得出 $\mathbf{y}_\ell^tA\mathbf{y}_\ell>0$. 再由上述等式得出 $\mathbf{x}^t(A\odot B)\mathbf{x}>0$, 即 $A\odot B$ 正定. □

以上结果称为 Schur 定理.