# 第八周习题课

## §1 关于习题

*4.* 设 $p$ 和 $q$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上两个二次型，它们在标准基下的矩阵分别为 $A$ 和 $B$. 证明：$A \sim_c B$ 当且仅当 $\mathrm{rank}(p) = \mathrm{rank}(q)$.

**证明.** 设 $A \sim_c B$. 则 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ (第一章第四讲命题 7.5). 于是 $\mathrm{rank}(p) = \mathrm{rank}(q)$ (双线性型秩的定义). 反之, 设 $\mathrm{rank}(p) = \mathrm{rank}(q)$. 则 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$. 设 $r = \mathrm{rank}(A)$. 则 $r = \mathrm{rank}(B)$. 因为 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{C})$, 所以

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B \sim_c \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

见(第一章第五讲命题 7.19). 于是, $A \sim_c B$. □

*5.* 设 $q \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 齐二次. 证明 $q$ 在 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 中可约当且仅当或者 $\mathrm{rank}(q) = 1$ 或者 $q$ 的签名是 $(1, 1)$.

**证明.** 设 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$, 其中 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 令 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t$, 其中 $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$, 其中 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^t A P = \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

则

$$\tilde{q}(\mathbf{y}) := q(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^t P^t A P \mathbf{y} = y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_{k+\ell}^2.$$

设 $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})$, 其中 $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 是齐一次. 则

$$\tilde{q}(\mathbf{y}) = \underbrace{f(P\mathbf{y})}_{\tilde{f}(\mathbf{y})} \underbrace{g(P\mathbf{y})}_{\tilde{g}(\mathbf{y})}.$$

于是，

$$q(\mathbf{y}) = y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_{k+\ell}^2$$

在 $\mathbb{R}[y_1, \ldots, y_n]$ 中可约. 由第一章第五讲例 8.11 可知, $\mathrm{rank}(\tilde{q}) \leq 2$. 于是 $\tilde{q}$ 只可能是下述五种情况:

$$\tilde{q} = y_1^2, \quad \tilde{q} = -y_1^2, \quad \tilde{q} = y_1^2 + y_2^2, \quad \tilde{q} = y_1^2 - y_2^2, \quad \tilde{q} = -y_1^2 - y_2^2.$$

其中只有 $y_1^2$, $-y_1^2$ 和 $y_1^2 - y_2^2$ 可约. 即 $\mathrm{rank}(q) = 1$ 或 $q$ 的签名 $(1, 1)$.

反之, $\tilde{q}(\mathbf{y})$ 只可能是 $y_1^2, -y_1^2$ 和 $y_1^2 - y_2^2$. 它们都是可约的. 通过变换 $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ 得到关于 $q(\mathbf{x})$ 的分解. □

**引理 1.1** 设 $f_1, \ldots, f_d \in V^*$ 线性无关. 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $V$ 的一组基, $f_i$ 在该基下的矩阵是 $\mathbf{a}_i \in F^{1\times n}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 则 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d$ 线性无关.

**证明.** 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in F$ 使得

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{a}_k = O_{1\times n}.$$

则对于任意 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \in V$,

$$(\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_k f_d)(\mathbf{x}) = (\alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_d\mathbf{a}_d)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

(见第一章第三讲例 5.6.) 于是 $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_d f_d = \mathbf{0}^*$. 由此得出 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_d = 0$. 即 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d$ 线性无关. □

*6.* 设 $F$ 是特征不等于 2 的域, $V$ 是 $F$ 上的 $n$ 维线性空间, $f_1, \ldots, f_k \in V^*$. 设映射 $q : V \longrightarrow F$ 由公式$\forall \mathbf{x} \in V$, $q(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})^2 + \cdots + f_k(\mathbf{x})^2$. 证明 $\mathrm{rank}(q) \leq \dim\langle f_1, \ldots, f_k\rangle$.

**证明.** 设 $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(\mathbf{x})f_1(\mathbf{y}) + \cdots + f_k(\mathbf{x})f_k(\mathbf{y})$. 于是 $h \in \mathcal{L}_2^+(V)$ 且 $q(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. 故 $q$ 是二次型.

不妨设 $f_1, \ldots, f_d$ 是 $\langle f_1, \ldots, f_k\rangle$ 的一组基. 则

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \alpha_{i,j} f_i f_j, \tag{1}$$

其中 $\alpha_{i,j} \in F$. 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $V$ 的一组基. 设 $f_i$ 在该基下的矩阵是 $\mathbf{a}_i \in F^{1\times n}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 由引理 1.1, $\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_d$ 是线性无关. 设 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $P$ 的前 $d$ 行是 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d$. 考虑坐标变换

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_d \\ \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

在该坐标变换下 (1) 变为 $\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \alpha_{i,j} y_i y_j$. 于是, 在基底 $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P^{-1}$ 下, 对任意的 $\mathbf{y} = y_1\epsilon_1 + \cdots + y_n\epsilon_n$, $q(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \alpha_{i,j} y_i y_j$. 进而 $q$ 在新基底下的矩阵具有形式

$$\begin{pmatrix} B_{d\times d} & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

于是 $\mathrm{rank}(q) = \mathrm{rank}(B) \leq d$. □

## §2 习题 6 的拓展

**问题.** 设 $V$ 是域 $F$ 上的 $n$ 线性空间. 给定 $f_1,\dots,f_k\in V^*$, 如何通过 $V$ 计算 $f_1,\dots,f_k$ 的一个极大线性无关组.

**命题 2.1** 如上述问题所设. 令 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 是 $V$ 的一组基, $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k\in F^{1\times n}$ 分别是 $f_1,\dots,f_k$ 是在该基下的矩阵. 设 $\mathbf{a}_{i_1},\dots,\mathbf{a}_{i_d}$ 是 $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$ 的极大线性无关组, 则 $f_{i_1},\dots,f_{i_d}$ 是 $f_1,\dots,f_k$ 的极大线性无关组, 且

$$\dim\left(\cap_{i=1}^k\ker(f_i)\right)=n-d.$$

**证明.** 不妨设 $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$ 是 $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$ 的极大线性无关组. 设 $\alpha_1,\dots,\alpha_d\in F$ 使得 $\alpha_1f_1+\cdots+\alpha_df_d=\mathbf{0}^*$. 则对于任意 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$,

$$0=\mathbf{0}^*(\mathbf{x})=\alpha_1f_1(\mathbf{x})+\cdots+\alpha_df_d(\mathbf{x})=(\alpha_1\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_d\mathbf{a}_d)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

由 $x_1,\dots,x_n$ 的任意性可知, $\alpha_1\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_d\mathbf{a}_d=O_{1\times n}$. 于是 $\alpha_1=\cdots=\alpha_d=0$. 即 $f_1,\dots,f_d$ 线性无关. 把 $f_1,\dots,f_d$ 扩充为 $f_1,\dots,f_k$ 的一个极大线性无关组. 不妨设为 $f_1,\dots,f_d,f_{d+1},\dots,f_{d+\ell}$. 由引理 1.1 可知 $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d,\mathbf{a}_{d+1},\dots,\mathbf{a}_{d+\ell}$ 线性无关. 由此可得, $\ell=0$ (第一章第二讲命题 4.4 (ii)). 即 $f_1,\dots,f_d$ 是 $f_1,\dots,f_k$ 的一个极大线性无关组.

设 $A\in F^{k\times n}$ 其行向量是 $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$. 则

$$\mathbf{x}\in\cap_{i=1}^k\ker(f_i)\iff\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in V_A\quad(\text{以 }A\text{ 为系数的齐次线性方程组的解空间}).$$

这个必要充分条件给出了从 $\cap_{i=1}^k\ker(f_i)$ 到 $V_A$ 的线性同构 (将第一章第三讲例 5.8 中的线性同构限制在 $\cap_{i=1}^k\ker(f_i)$ 即可). 由第一章第二讲定理 4.13.

$$\dim\left(\cap_{i=1}^k\ker(f_i)\right)=\dim(V_A)=n-\operatorname{rank}(A)=n-d.\quad\square$$

**例 2.2** 设 $V$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 $n$ 维线性空间, $f_1,\dots f_k\in V^*$. 则二次型 $q=f_1^2+\cdots+f_k^2$ 的秩等于 $\dim\langle f_1,\dots,f_k\rangle$.

**证明.** 设 $d=\dim\langle f_1,\dots,f_k\rangle$ 和 $r=\operatorname{rank}(q)$. 由习题 6 可知, $r\le d$. 注意到 $q$ 是半正定的. 于是 $r$ 是 $q$ 的正惯性指数. 那么 $V$ 中有一个 $n-r$ 维空间 $W$ 使得对于任意 $\mathbf{w}\in W$, $q(\mathbf{w})=0$. 即 $f_1(\mathbf{w})^2+\cdots+f_k(\mathbf{w})^2=0$. 于是 $f_1(\mathbf{w})=\cdots=f_k(\mathbf{w})=0$. 由此得出

$$W\subset\cap_{i=1}^k\ker(f_i)\implies\dim(W)\le\dim\left(\cap_{i=1}^k\ker(f_i)\right)\overset{\text{命题 2.1}}{\implies}n-r\le n-d\implies r\ge d.$$

从而 $r=d$. $\square$

**例 2.3** 设 $V$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 $n$ 维线性空间, $q = f_1^2 + \cdots + f_s^2 - f_{s+1}^2 - \cdots - f_{s+t}^2$, 其中 $f_1, \ldots f_{s+t} \in V^*$. 则 $q$ 的正惯性指数 $\leq s$, 负惯性指数 $\leq t$.

**证明.** 设 $q$ 的签名是 $(k, \ell)$. 我们证明 $k \leq s$. 假设 $k > s$. 则 $V$ 中 有一个 $k$ 维子空间 $U$ 使得对任意非零向量 $\mathbf{u} \in U$, $q(\mathbf{u}) > 0$. 由命题 *2.1*, $\dim\left(\cap_{i=1}^s \ker(f_i)\right) \geq n - s > n - k$. 于是, 存在非零向量

$$\mathbf{u} \in U \cap \left(\cap_{i=1}^k \ker(f_i)\right).$$

则 $q(\mathbf{u}) > 0$ 且 $q(\mathbf{u}) \leq 0$. 矛盾. $\square$

## §3 双线性型的秩的等价刻画（补充知识）

设 $f \in \mathcal{L}_2(V)$. 对 $\mathbf{u} \in V$, 定义

$$\begin{array}{rccc} L_{\mathbf{u}}: & V & \longrightarrow & F \\ & \mathbf{x} & \mapsto & f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} R_{\mathbf{u}}: & V & \longrightarrow & F \\ & \mathbf{y} & \mapsto & f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \end{array}.$$

则 $L_{\mathbf{u}}, R_{\mathbf{u}} \in V^*$. 设 $U_L^* = \langle \{L_{\mathbf{u}}, | \mathbf{u} \in V\} \rangle$ 和 $U_R^* = \langle \{R_{\mathbf{u}}, | \mathbf{u} \in V\} \rangle$.

**引理 3.1** 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $V$ 的一组基. 则

$$U_L^* = \langle L_{\mathbf{e}_1}, \ldots L_{\mathbf{e}_n} \rangle \quad \text{和} \quad U_R^* = \langle R_{\mathbf{e}_1}, \ldots R_{\mathbf{e}_n} \rangle.$$

**证明.** 设 $\mathbf{u} \in V$. 则存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得 $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n$. 则对任意 $\mathbf{x} \in V$,

$$\begin{aligned} (\alpha_1 L_{\mathbf{e}_1} + \cdots + \alpha_n L_{\mathbf{e}_n})(\mathbf{x}) &= \alpha_1 L_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{x}) + \cdots + \alpha_n L_{\mathbf{e}_n}(\mathbf{x}) = \alpha_1 f(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) + \cdots + \alpha_n f(\mathbf{x}, \mathbf{e}_n) \\ &= f(\mathbf{x}, \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n) = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = L_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

于是, $L_{\mathbf{u}} = \alpha_1 L_{\mathbf{e}_1} + \cdots + \alpha_n L_{\mathbf{e}_n}$. 由此 $U_L^* = \langle L_{\mathbf{e}_1}, \ldots L_{\mathbf{e}_n} \rangle$. 类似可证 $U_R^* = \langle R_{\mathbf{e}_1}, \ldots R_{\mathbf{e}_n} \rangle$.

**引理 3.2** $\operatorname{rank}(f) = \dim(U_L^*) = \dim(U_R^*)$.

**证明.** 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $V$ 的一组基, $A$ 是 $f$ 在该基下的矩阵. 则矩阵的第 $i$ 行是

$$(f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n)) = (R_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{e}_1), \ldots, R_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{e}_n)),$$

是 $R_{\mathbf{e}_i}$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵表示. 由命题 2.1 可知, $\operatorname{rank}(A) = \dim U_R^*$. 类似可证 $\operatorname{rank}(A^t) = \dim U_L^*$. 于是 $\operatorname{rank}(f) = \dim(U_L^*) = \dim(U_R^*)$. $\square$.

设 $d = \dim(U_L^* + U_R^*)$. 在多重线性代数中 $d$ 称为 $f$ 的“秩”. 上述引理蕴含

$$d \geq \operatorname{rank}(f).$$

当 $f \in \mathcal{L}^+(V)$ 时, $L_{\mathbf{u}} = R_{\mathbf{u}}$. 当 $f \in \mathcal{L}^-(V)$ 时, $L_{\mathbf{u}} = -R_{\mathbf{u}}$. 于是, 当 $f \in \mathcal{L}^+(V)$ 或 $f \in \mathcal{L}^-(V)$ 时, $U_L^* = U_R^*$. 特别地 $d = \mathrm{rank}(f)$.

**习题** 6 设 $f_1, \ldots, f_k \in V^*$. 二次型 $q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k f_i(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x})$ 的秩不大于 $\dim\langle f_1, \ldots, f_k\rangle$.

**证明.** 设 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k f_i(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{y})$ 是对称双线性型. 对任意 $\mathbf{u} \in V$,

$$L_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k \underbrace{\left(\sum_{j=1}^k f_j(\mathbf{u})\right)}_{\alpha_i \in F} f_i(\mathbf{x}).$$

于是 $L_{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i \in \langle f_1, \ldots, f_k\rangle$. 由此可知, $U_L^* \subset \langle f_1, \ldots, f_k\rangle$. 特别地,

$$\dim(U_L^*) \leq \dim\langle f_1, \ldots, f_k\rangle := h.$$

根据引理 3.2, $\mathrm{rank}(f) \leq h$. 因为 $f$ 是 $q$ 的配极, 所以 $\mathrm{rank}(q) \leq h$. □.

## §4 更正

**例 4.1** 设 $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ 和 $B = (b_{i,j})_{n\times n}$ 是正定矩阵. 证明 $A \odot B$ 正定.

**证明.** 因为 $A$ 和 $B$ 对称, 所以 $A \odot B$ 对称. 因为 $B$ 正定, 所以存在

$$M = (m_{i,j})_{n\times n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

使得 $B = M^t M$. 则

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{k,i} m_{k,j}, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

设 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$. 则

$$\mathbf{x}^t (A \odot B)\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{i,j} m_{k,i} m_{k,j} x_i x_j).$$

交换和号得

$$\mathbf{x}^t (A \odot B)\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} (m_{k,i} x_i)(m_{k,j} x_j)\right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{y}_k^t A \mathbf{y}_k,$$

其中 $\mathbf{y}_k = (m_{k,1} x_1, \ldots, m_{k,n} x_n)^t$. 因为 $A$ 正定, 所以对任意 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbf{y}^t A \mathbf{y} \geq 0$.

设 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. 则 $\mathbf{x}$ 有一个坐标非零. 不妨设 $x_1 \neq 0$. 注意到 $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ 的第一个坐标分别是 $m_{1,1} x_1, \ldots, m_{n,1} x_1$. 因为 $M$ 可逆, 所以 $M$ 的第一列不是零向量. 于是存在 $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ 使得 $m_{\ell,1} \neq 0$. 我们有 $\mathbf{y}_\ell \neq \mathbf{0}$. 从而 $\mathbf{y}_\ell^t A \mathbf{y}_\ell > 0$. 由此得出 $\mathbf{x}^t (A \odot B)\mathbf{x} > 0$, 即 $A \odot B$ 正定. □

## §5 小结

第二和三章中经常用到的知识

1. 有限维线性空间(线性相关性), 基底(基扩充), 坐标(通过坐标在抽象线性空间中计算), 基变换和坐标变换.

2. 子空间的交与和，直和，子空间的维数公式.

3. 线性映射的基本性质(基本定理 I, II, 线性同构, 复合), 矩阵表示.

4. 核与像之间的维数关系.

5. 双线性型的基本性质和矩阵表示, 秩.

6. 对称矩阵(对称双线性型，二次型)的矩阵表示，秩和规范型的计算.

7. 实对称矩阵(实二次型)的惯性定理, 签名的计算.

8. (半)正定矩阵((半)正定二次型)的各种等价刻画和判别法.

第二和三章中偶然用到的知识

1. 商空间和对偶空间.

2. 子空间的对偶刻画.

3. 斜对称矩(斜对称双线性型)阵的规范型.

## §6 幻方（补充知识）

**例 6.1** 设 $n > 2$, $E$ 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ 中的单位矩阵, $\hat{E}$ 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ 中副对角线元素都是 1, 而其它元素都等于零的矩阵. 令 $U = \{\lambda E \mid \lambda \in \mathbb{Q}\}$ 和 $\widehat{U} = \{\lambda \hat{E} | \lambda \in \mathbb{Q}\}$. 证明:

$$\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q}) = \mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q}) \oplus U \oplus \widehat{U}. \tag{2}$$

是直和.

**证明.** 设 $A + \lambda E + \mu \widehat{E} = O$, 其中 $A \in \mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})$. 则 $\lambda E + \mu \widehat{E} \in \mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})$. 当 $n = 2m$ 时, 我们有 $\lambda + \mu = 2m\lambda = 2m\mu$. 再由 $m > 1$ 得到 $\lambda = \mu = 0$. 从而 $A = O$. 由讲义中直和的等价条件可得 $\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q}) + U + \widehat{U}$ 是直和. 当 $n = 2m + 1$ 时, $\lambda + \mu = (2m + 1)\lambda + \mu$. 因为 $m > 0$, 所以 $\lambda = 0$. 从而 $\mu = 0$. 由此可知, $\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q}) + U + \widehat{U}$ 是直和.

因为 $U$ 和 $\widehat{U}$ 都是 $\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})$ 的子空间, 所以 $\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})\oplus U\oplus\widehat{U}\subset\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})$. 由命题 *4.16* 和刚证明的结论可知

$$\dim(\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})\oplus U\oplus\widehat{U})=\dim(\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q}))+\dim(U)+\dim(\widehat{U})=\dim(\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q}))+2.$$

而 $\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})$ 是 $\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})$ 的齐次线性方程组添加了两个齐次线性方程后的方程组的解空间*(见第一章第一次习题课讲义中例 1.4)*. 由第一章第二次习题课讲义例 *2.2* 可知

$$\dim(\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q}))\geq\dim(\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q}))-2.$$

于是,

$$\dim(\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})\oplus U\oplus\widehat{U})\geq\dim(\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})).$$

但 $\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})\oplus U\oplus\widehat{U}\subset\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})$. 根据命题 *4.15 (i)*, $\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})\oplus U\oplus\widehat{U}$=$\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})$. □

**例 6.2** 计算 $\dim(\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q}))$, 其中 $n>2$.
**证明.** 由上例可知 $\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})=\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})\oplus U\oplus\widehat{U}$. 我们有

$$\dim\left(\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})\right)=\dim\left(\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})\right)+2.$$

于是只要计算 $\dim\left(\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})\right)$. 设

$$S=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\quad\text{和}\quad\mathrm{Smag}_n^0(\mathbb{Q})=\left\{A\in\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})\,|\,\sigma(A)=0\right\}.$$

我们先来验证

$$\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})=\mathrm{Smag}_n^0(\mathbb{Q})\oplus\langle S\rangle. \tag{3}$$

注意到 $\mathrm{Smag}_n^0(\mathbb{Q})$ 是齐次线性方程组的解. 于是它是子空间. 而 $\langle S\rangle$ 中的元素都是幻方. 于是 $\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})\supseteq\mathrm{Smag}_n^0(\mathbb{Q})+\langle S\rangle$. 设 $A\in\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})$ 则

$$A-\frac{\sigma(A)}{n}S\in\mathrm{Smag}_n^0(\mathbb{Q})\implies\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})\subset\mathrm{Smag}_n^0(\mathbb{Q})+\langle S\rangle.$$

由此得出 $\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})=\mathrm{Smag}_n^0(\mathbb{Q})+\langle S\rangle$. 设 $A\in\mathrm{Smag}_n^0(\mathbb{Q})\cap\langle S\rangle$. 则 $A=\alpha S$ 且 $\sigma(A)=0$. 由此可知 $\alpha=0$, 即 $A=O_{n\times n}$. 于是, $\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})=\mathrm{Smag}_n^0(\mathbb{Q})\oplus\langle S\rangle$.

下一步, 我们来计算 $\dim\left(\mathrm{Smag}_n^0(\mathbb{Q})\right)$. 对 $i,j\in\{1,2,\ldots,n-1\}$, 设

$$M_{i,j}=\begin{pmatrix}E_{i,j}^{(n-1)}&\mathbf{u}_i\\\mathbf{v}_j&1\end{pmatrix},$$

其中 $E_{i,j}^{(n-1)}$ 是 $(n-1)\times(n-1)$ 阶方阵, 在 $i$ 行 $j$ 列处等于 1, 而其它地方等于 0, $\mathbf{u}_i \in \mathbb{Q}^{n-1}$, 在第 $i$ 个坐标等于 $-1$, 而其它处等于 0, $\mathbf{v}_j \in \mathbb{Q}^{1\times(n-1)}$, 在第 $i$ 个坐标等于 $-1$, 而其它处等于 0. 则

$$\Omega = \{M_{i,j} \,|\, i,j \in \{1,2,\ldots,n-1\}\}$$

线性无关. 这是因为 $E_{i,j}^{(n-1)}, i,j \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ 线性无关. 下面我们验证 $\Omega$ 是 $\mathrm{Smag}_n^0(\mathbb{Q})$ 的一组基. 显然 $\Omega \subset \mathrm{Smag}_n^0(\mathbb{Q})$. 于是, 我们只要验证 $\mathrm{Smag}_n^0(\mathbb{Q}) = \langle\Omega\rangle$.

设 $A=(a_{i,j}) \in \mathrm{Smag}_n^0(\mathbb{Q})$. 令 $B=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j}M_{i,j}$. 则

$$A-B=\begin{pmatrix} O_{(n-1)\times(n-1)} & \mathbf{u}' \\ \mathbf{v}' & \alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{Smag}_n^0(\mathbb{Q}),$$

其中 $\mathbf{u}' \in \mathbb{Q}^{n-1}$, $\mathbf{v}' \in \mathbb{Q}^{1\times(n-1)}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$. 于是 $\mathbf{u}'$ 和 $\mathbf{v}'$ 都是零向量. 从而 $\alpha = 0$. 我们得出 $A \in \langle\Omega\rangle$.

由此可知

$$\begin{aligned} &\dim\left(\mathrm{Smag}_n^0(\mathbb{Q})\right) = (n-1)^2 \\ &\xRightarrow{(3)} \dim\left(\mathrm{Smag}_n(\mathbb{Q})\right) = (n-1)^2+1 \\ &\xRightarrow{(2)} \dim\left(\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})\right) = (n-1)^2-1. \quad \square \end{aligned}$$