第九周习题课

§1 关于习题

4. 设 V 实数域上有限维线性空间, q 是 V 上二次型. 设存在 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 使得 $q(\mathbf{u}) > 0$ 和 $q(\mathbf{v}) < 0$. 证明: 存在 $\mathbf{w} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ 使得 $q(\mathbf{w}) = 0$, 且 q 是满射.

证明. 因为存在 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 使得 $q(\mathbf{u}) > 0$ 和 $q(\mathbf{v}) < 0$, 所以 $q(\mathbf{u})$ 既不是半正定的也不是半负定的. 由惯性定理, 存在 V 的一组基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 使得对任意 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, 我们有

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2,$$

其中 $k > 0$ 且 $\ell > 0$.

令 $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{k+1}$. 则 $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ 且 $q(\mathbf{x}) = 1 - 1 = 0$. 设 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 令

$$\mathbf{z} = \frac{\alpha + 1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\alpha - 1}{2}\mathbf{e}_{k+1}.$$

则

$$q(\mathbf{z}) = \frac{(\alpha+1)^2}{4} - \frac{(\alpha-1)^2}{4} = \alpha.$$

于是, q 是满射. □

5. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 证明: 存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $\epsilon \in (-\delta, \delta)$, $E + \epsilon A$ 正定.

证明. 设 A_k 是 A 的前 k 行 和 前 k 列组成的矩阵, $k = 1, 2, \ldots, n$. 则 $E + \epsilon A$ 的 k 阶主子式 $\Delta_k(\epsilon) = \det(E_k + \epsilon A)$. 它是关于 ϵ 的多项式. 于是, 它是关于 ϵ 的连续函数. 因为 $\Delta_k(0) = 1$, 所以存在 $\delta_k > 0$ 使得对任意 $\epsilon \in (-\delta_k, \delta_k)$ 时, $\Delta_k(\epsilon) > 0$. 令 $\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_n)$. 则当 $\epsilon \in (-\delta, \delta)$ 时, $\Delta_k(\epsilon) > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. 由第一章第六讲定理 9.18 可知, 当 $\epsilon \in (-\delta, \delta)$ 时, $E + \epsilon A$ 正定. □

§2 基本例子

例 2.1 设 V 的一组基是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, W 的一组基是 ϵ_1, ϵ_2. 线性映射 ϕ 由

$$\phi(\mathbf{e}_1) = \epsilon_1 - \epsilon_2, \quad \phi(\mathbf{e}_2) = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \phi(\mathbf{e}_3) = \epsilon_2 - 2\epsilon_1.$$

确定.

(i) 求 ϕ 在上述基底下的矩阵;

(ii) 求 $\mathrm{rank}(\phi)$ 和 $\ker(\phi)$ 的一组基;

(iii) 设 $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1; \mathbf{w}_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \mathbf{w}_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2$. 验证 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是 V 的一组基, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是 W 的一组基. 并求 ϕ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3; \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 下的矩阵.

解. *(i)* 由 ϕ 的定义可知

$$(\phi(\mathbf{e}_1), \phi(\mathbf{e}_2), \phi(\mathbf{e}_3)) = (\epsilon_1, \epsilon_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}.$$

映射 ϕ 在给定基底下的矩阵是 A.

(ii) 直接计算得 $\mathrm{rank}(A) = 2$. 于是 $\mathrm{rank}(\phi) = 2$. 以 A 为系数的齐次线性方程组的解空间维数等于 1, 其基底是 $(3, 1, 2)^t$. 由此可知, $\ker(\phi)$ 的基底是 $3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$.

(iii) 由题设可知

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \quad \text{和} \quad (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = (\epsilon_1, \epsilon_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{Q}.$$

因为 P 和 Q 都可逆, 所以 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是 V 的一组基, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是 W 的一组基(第一章第三讲定理 *5.1)*. 于是, ϕ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$; $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 下的矩阵是

$$Q^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 2.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $W = \{\mathcal{X} \in \mathcal{L}(V) \,|\, \mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{O}\}$.

(i) 验证 W 是 $\mathcal{L}(V)$ 中的子空间.

(ii) 计算 $\dim(W)$.

解. *(i)* 由算子复合的性质可知 $\phi(\mathcal{X}) = \mathcal{A}\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{L}(V)$ 上的线性算子, 而 $W = \ker(\phi)$. 所以 W 是子空间.

(ii) 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\Phi : \mathcal{L}(V) \longrightarrow \mathrm{M}_n(F)$ 是把线性算子映到选定基底下的矩阵的代数同构. 令 $\Phi(\mathcal{A}) = A$, $\Phi(\mathcal{X}) = X$. 则 $\Phi(W) = \{X \in \mathrm{M}_n(F) \,|\, AX = O\}$. 因为 Φ 是线性同构, 所以 $\dim(W) = \dim(\Phi(W))$. 而 $\Phi(W)$ 是线性算子

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{B}: & \mathrm{M}_n(F) & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(F) \\ & X & \mapsto & AX. \end{array}$$

的核. 由第二章第一次讲义例 *1.13* 可知, $\operatorname{rank}(B) = n\operatorname{rank}(A)$. 于是,

$$\dim(\Theta(W)) = n^2 - n\operatorname{rank}(A).$$

从而 $\dim(W) = n^2 - n\operatorname{rank}(A)$.

例 2.3 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$ 且 $A \sim_s B$.

(i) 证明: 对任意 $\lambda \in F$, $(\lambda E + A) \sim_s (\lambda E + B)$;

(ii) 再设 A 可逆. 证明: B 可逆且 $A^{-1} \sim_s B^{-1}$.

证明. 设 $B = P^{-1}AP$, 其中 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$.

(i) 计算 $P^{-1}(\lambda E+A)P = P^{-1}\lambda EP+P^{-1}AP = \lambda E+B$. 于是, $(\lambda E+A) \sim_s (\lambda E+B)$.

(ii) 因为秩是相似不变量, 所以 B 可逆. 我们有 $B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$. 于是, $B^{-1} \sim_s A^{-1}$. $\square$

另证. 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, ϕ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵是 A. 因为 $A \sim_s B$. B 是 ϕ 在 V 的另一组基 $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P$ 下的矩阵是 B.

(i) 注意到数乘算子 $\lambda\mathcal{E}$ 在 V 的任意一组基下的矩阵都是 λE. 于是, $\lambda\mathcal{E} + \phi$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵是 $\lambda E + A$, 而在 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下的矩阵是 $\lambda E + B$. 故

$$(\lambda E + A) \sim_s (\lambda E + B).$$

(ii) 由线性算子和矩阵之间的代数同构可知, ϕ^{-1} 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵是 A^{-1}, 在 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下的矩阵是 B^{-1}. 于是 $A^{-1} \sim_s B^{-1}$. $\square$

例 2.4 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$ 且对任意 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$, $PA = AP$. 证明: A 是数乘矩阵.

证明. 设 $A = (a_{i,j})$ 和 $L_{i,j}(1)$ 是第二类初等矩阵, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$. 由

$$L_{i,j}(1)A = AL_{i,j}(1).$$

可知, 等式左侧在 i 行 i 列处的元素 $a_{i,i} + a_{j,i}$ 等于等式右侧矩阵在 i 行 i 列处的元素 $a_{i,i}$. 于是 $a_{j,i} = 0$. 由此推出 A 是对角矩阵.

设 $L_{i,j}$ 是第一类初等矩阵. 由 $L_{i,j}A = AL_{i,j}$ 可知, $a_{i,i} = a_{j,j}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 即 A 是数乘矩阵. $\square$

另证. 从上述代数同构的观点，本例中的结论等价于证明: 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果对任意的可逆线性算子 $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{PA} = \mathcal{AP}$, 则 $\mathcal{A}$ 是数乘算子.

回忆上学期第五次习题课*(*李老师讲义*)*第七页例子的结论. 如果对任意 $\mathbf{v} \in V$, 存在 $\lambda_{\mathbf{v}} \in F$ 使得 $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda_{\mathbf{v}}\mathbf{v}$, 则 $\mathcal{A}$ 是数乘算子.

假设 $\mathcal{A}$ 不是数乘算子. 则存在 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ 线性无关使得 $\mathcal{A}(\mathbf{u})=\mathbf{v}$. 令 $\mathbf{e}_1=\mathbf{u}$, $\mathbf{e}_2=\mathbf{v}$. 则 $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)=\mathbf{e}_2$. 由 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 扩充为 V 的一组基 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\ldots,\mathbf{e}_n$. 设 $\mathbf{w}=\mathcal{A}(\mathbf{e}_2)$.

情形1. $\mathbf{w}\neq\mathbf{e}_1$. 令 $\mathcal{P}$ 是可逆线性算子满足 $\mathcal{P}(\mathbf{e}_1)=\mathbf{e}_2$, $\mathcal{P}(\mathbf{e}_2)=\mathbf{e}_1$. 则

$$\mathcal{A}\mathcal{P}(\mathbf{e}_1)=\mathcal{A}(\mathbf{e}_2)=\mathbf{w}\quad 而\quad \mathcal{P}\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)=\mathcal{P}(\mathbf{e}_2)=\mathbf{e}_1.$$

故 $\mathcal{P}\mathcal{A}\neq\mathcal{A}\mathcal{P}$. 矛盾.

情形2. $\mathbf{w}=\mathbf{e}_1$. 因为 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 线性无关, 所以 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$ 线性无关. 于是存在可逆线性算子 $\mathcal{P}$ 使得 $\mathcal{P}(\mathbf{e}_1)=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$, $\mathcal{P}(\mathbf{e}_2)=\mathbf{e}_1$.

$$\mathcal{A}\mathcal{P}(\mathbf{e}_1)=\mathcal{A}(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)=\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1\quad 而\quad \mathcal{P}\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)=\mathcal{P}(\mathbf{e}_2)=\mathbf{e}_1.$$

故 $\mathcal{P}\mathcal{A}\neq\mathcal{A}\mathcal{P}$. 矛盾. □

注解 2.5 上述例子的结果等价于: 如果一个线性算子在任何基底下的矩阵不变, 则该算子必然是数乘算子. 这一结论的逆显然成立.

§3 利用核与商空间证明矩阵秩的（不）等式

基本步骤如下:

(i) 把矩阵理解为线性映射. 设 $A\in F^{m\times n}$. 则 A 可以代表从 F^n 到 F^m 的线性映射由公式 $\forall\,\mathbf{x}\in F^n$, $\mathbf{x}\mapsto A\mathbf{x}$ 给出, 即 $A(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$.

(ii) 利用对偶公式 $\dim(\ker(A))+\operatorname{rank}(A)=n$ 把矩阵的秩用核的维数表示.

(iii) 考虑核空间之间的包含关系建立线性映射, 利用线性映射基本定理 I 诱导出单射

(iv) 利用单射保持原像空间的维数以及商空间维数公式证明不等式, 当诱导单射也是满射时得到等式.

记号. 设 $A\in F^{m\times n}$, K_A 代表 A 的核，I_A 代表 A 的像, d_A 代表 $\dim(K_A)$, r_A 代表 $\operatorname{rank}(A)=\dim(I_A)$. 此时, 对偶公式可以简单地表示为 $d_A+r_A=n$.

例 3.1 设 $A\in F^{m\times k}, B\in F^{k\times n}$. 证明: 如果 $AB=O_{m\times n}$, 则 $r_A+r_B\leq k$.

证明. 不等式 $r_A+r_B\leq k$ 等价于 $k-d_A+n-d_B\leq k$, 即 $d_A+d_B\geq n$. 注意到 $K_B\subset K_{AB}$. 定义线性映射

$$\begin{array}{cccc}\phi: & K_{AB} & \longrightarrow & K_A\\ & \mathbf{x} & \mapsto & B\mathbf{x}\end{array}.$$

注意 $A(\phi(\mathbf{x}))=A(B(\mathbf{x}))=(AB)(\mathbf{x})=\mathbf{0}_m$. 于是 $\phi(\mathbf{x})\in K_A$, 即 ϕ 是良定义的. ϕ 显然是线性的. 因为 $K_B\subset K_{AB}$, 所以 $K_B=\ker(\phi)$. 由线性映射基本定理 I 可知, 诱导的 $\bar{\phi}: K_{AB}/K_B\longrightarrow K_A$ 是单线性映射. 于是

$$\dim(K_{AB}/K_B)\le\dim(K_A)\implies d_{AB}-d_B\le d_A\overset{d_{AB}=n}{\implies} d_A+d_B\ge n.\quad\square$$

例 3.2 设 $A\in F^{m\times k}, B\in F^{k\times n}$. 证明 $r_{AB}\ge r_A+r_B-k$.

证明. 不等式 $r_{AB}\ge r_A+r_B-k$ 等价于 $n-d_{AB}\ge k-d_A+n-d_B-k$, 即 $d_A+d_B\ge d_{AB}$. 注意到 $K_B\subset K_{AB}$. 定义线性映射

$$\begin{array}{cccc}\phi: & K_{AB} & \longrightarrow & K_A\\ & \mathbf{x} & \mapsto & B\mathbf{x}\end{array}.$$

注意 $A(\phi(\mathbf{x}))=A(B(\mathbf{x}))=(AB)(\mathbf{x})=\mathbf{0}_m$. 于是 $\phi(\mathbf{x})\in K_A$, 即 ϕ 是良定义的. ϕ 显然是线性的. 因为 $K_B\subset K_{AB}$, 所以 $K_B=\ker(\phi)$. 由线性映射基本定理 I 可知, 诱导的 $\bar{\phi}: K_{AB}/K_B\longrightarrow K_A$ 是单线性映射. 于是

$$\dim(K_{AB}/K_B)\le\dim(K_A)\implies d_{AB}-d_B\le d_A\implies d_A+d_B\ge d_{AB}.\quad\square$$

例 3.3 设 $A\in F^{m\times k}, B\in F^{k\times \ell}, C\in F^{\ell\times n}$. 证明 $r_{AB}+r_{BC}\le r_B+r_{ABC}$.

证明. 上述不等式等价于 $\ell-d_{AB}+n-d_{BC}\le\ell-d_B+n-d_{ABC}$, 即 $d_B+d_{ABC}\le d_{AB}+d_{BC}$.

注意到 $K_{BC}\subset K_{ABC}$. 定义线性映射

$$\begin{array}{cccc}\phi: & K_{ABC} & \longrightarrow & K_{AB}\\ & \mathbf{x} & \mapsto & C\mathbf{x}\end{array}.$$

注意 $AB(\phi(\mathbf{x}))=AB(C(\mathbf{x}))=(ABC)(\mathbf{x})=\mathbf{0}_m$. 于是 $\phi(\mathbf{x})\in K_{AB}$, 即 ϕ 是良定义的. ϕ 显然是线性的. 再注意到 $K_B\subset K_{AB}$. 于是, 有商映射 $\pi: K_{AB}\longrightarrow K_{AB}/K_B$. 设 $\psi=\pi\circ\phi$. 则

$$\begin{array}{cccc}\psi: & K_{ABC} & \longrightarrow & K_{AB}/K_B\\ & \mathbf{x} & \mapsto & C\mathbf{x}+K_B\end{array}.$$

我们有下列交换图

$$\begin{tikzcd} K_{ABC} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & K_{AB} \arrow[d, "\pi"] \\ & K_{AB}/K_B. \end{tikzcd}$$

下面验证 $\ker(\psi)=K_{BC}$. 设 $\mathbf{x}\in\ker(\psi)$. 则 $C\mathbf{x}\in K_B$. 由此可知 $BC\mathbf{x}=\mathbf{0}_k$, 即 $\mathbf{x}\in K_{BC}$. 反之, 设 $\mathbf{x}\in K_{BC}$. 则 $C\mathbf{x}\in K_B$. 由此得出 $\psi(\mathbf{x})=\mathbf{0}_\ell+K_B$, 即 $\mathbf{x}\in\ker(\psi)$. 验证完毕. 于是诱导映射 $\bar{\psi}: K_{ABC}/K_{BC}\longrightarrow K_{AB}/K_B$ 是线性单射. 我们有

$$\dim(K_{ABC}/K_{BC})\le\dim(K_{AB}/K_B)\implies d_{ABC}-d_{BC}\le d_{AB}-d_B\implies d_{ABC}+d_B\le d_{AB}+d_{BC}.\quad\square$$