第十周习题课

约定. 在下述习题中 F 是域, V 是 F 上的有限维线性空间.

§1 关于习题

2. 设

$$\begin{array}{rccc} q: & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & X & \mapsto & \mathrm{tr}(X^tX). \end{array}.$$

证明 q 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 上的二次型并求 q 的签名.

证明. 设 $X = (x_{i,j})$. 则

$$q(X) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ik}^2\right).$$

因为 $q(X)$ 是 n^2 个未定元 $x_{i,j}$, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, 的齐二次多项式, 所以 q 是二次型. 由表达式可知, 当 $X \neq O$ 时, $q(X) > 0$. 于是, q 是正定的, 其签名等于 $(n^2, 0)$. □

5. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明: 对于任意 $m \in \mathbb{Z}$, A^m 正定.

证明. 先证当 $m \in \mathbb{N}$ 时, A^m 正定. 当 $m = 0, 1$ 时显然成立. 设 $m > 1$ 且 $m-1$ 时结论成立. 因为 A 正定, 所以存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = P^tP$ (第一章第六讲定理 9.16). 于是,

$$A^m = \underbrace{(P^tP)(P^tP)\cdots(P^tP)(P^tP)}_{m} = P^t\underbrace{(PP^t)\cdots(PP^t)}_{m-1}P = P^tB^{m-1}P,$$

其中 $B = PP^t$. 再由第一章第六讲定理 9.16, B 正定. 于是, B^{m-1} 正定(归纳假设). 因为 $A^m \sim_c B^{m-1}$, 所以 A^m 正定.

因为 A 正定, 所以 A^{-1} 正定(第一章第六讲例 9.17). 由上一段的结论可知, 当 $m \in \mathbb{N}$ 时, A^{-m} 也正定. □

6. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明: $\det(A)$ 等于 A 的对角线上元素之积当且仅当 A 是对角矩阵.

证明. 只需证明 $\det(A)$ 等于 A 的对角线上元素之积蕴含 A 是对角矩阵.

对 n 归纳. 当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 设 $n>1$ 且结论对 $n-1$ 阶正定矩阵成立. 设

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^t & a \end{pmatrix},$$

其中 $A_{n-1} \in \mathrm{SM}_{n-1}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $a \in \mathbb{R}$. 则 A_{n-1} 正定且 $a > 0$ (第一章第六讲定理 9.18). 由分块行列相伴消元法(第一章第六次习题课命题 3.1)可知

$$\det(A) = \det(A_{n-1})(a - \mathbf{x}^tA_{n-1}^{-1}\mathbf{x}).$$

因为 $\det(A) > 0$ 和 $\det(A_{n-1}) > 0$, 所以 $a - \mathbf{x}^t A_{n-1}^{-1}\mathbf{x} > 0$. 又因为 A_{n-1}^{-1} 正定(第一章第六讲例 9.17), 所以 $\mathbf{x}^t A_{n-1}^{-1}\mathbf{x} \geq 0$. 由此得出 $0 < a - \mathbf{x}^t A_{n-1}^{-1}\mathbf{x} \leq a$.

因为 $\det(A)$ 等于其对角线元素之积且 $0 < a - \mathbf{x}^t A_{n-1}^{-1}\mathbf{x} \leq a$, 所以 $\det(A_{n-1})$ 不小于 A_{n-1} 的对角线元素之积. 由第一章第六讲例 9.20, 我们有 $\det(A_{n-1})$ 不大于 A_{n-1} 的对角线元素之积. 于是, $\det(A_{n-1})$ 等于 A_{n-1} 的对角线元素之积. 由归纳假设 A_{n-1} 是对角矩阵. 进而, $\mathbf{x}^t A_{n-1}^{-1}\mathbf{x} = 0$. 因为 A_{n-1}^{-1} 正定, 所以 $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{n-1}$. 由此得出 A 是对角矩阵. □

§2　关于矩阵相似

例 2.1 *(i)* 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 证明: 如果 A 可逆, 则 $AB \sim_s BA$.

(ii) 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明: AB 相似于一个正定矩阵.

证明: *(i)* 直接计算 $A^{-1}(AB)A = BA$. 于是 $AB \sim_s BA$.

(ii) 由第一章第六讲定理 *9.16*, 我们可设 $A = P^tP$, $B = Q^tQ$, 其中 $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 直接计算得

$$AB = P^tPQ^tQ \sim_s Q(P^tPQ^tQ)Q^{-1} = QP^tPQ^t = (PQ^t)^t(PQ^t).$$

因为 $PQ^t \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 所以 $(PQ^t)^t(PQ^t)$ 正定(第一章第六讲定理 *9.16*). □

注解 2.2 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

直接计算得 $\mathrm{rank}(AB) = 1$ 和 $\mathrm{rank}(BA) = 0$. 于是, $AB \not\sim_s BA$.

注解 2.3 设实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

直接计算得

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

它不是对称矩阵. 由上例可知, AB 相似于一个(对称的)正定矩阵.

例 2.4 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$ 满足 $\mathrm{tr}(A) = 0$. 证明: 当 F 的特征等于零时, A 相似于一个对角线上的元素都等于零的方阵.

证明. 我们先证明下列断言.

断言. 设 $A = (a_{i,j})$ 如题所设. 则 A 相似于 $M = (m_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(F)$, 其中 $m_{1,1} = 0$.

断言的证明. 设 $a_{1,1}\neq 0$. 如果存在 $i>1$ 使得 $a_{i,1}\neq 0$. 令 $\lambda=-a_{1,1}/a_{i,1}$, 设 $L_{1,i}(\lambda)$ 是把 E 的第 i 行的 λ 倍加到第一行对应的第二类初等矩阵. 则 $L_{1,i}(\lambda)^{-1}=L_{1,i}(-\lambda)$. 则

$$A\sim_s L_{1,i}(\lambda)AL_{1,i}(-\lambda)=\underbrace{\begin{pmatrix}0 & B_{1\times(n-1)}\\ C_{(n-1)\times 1} & D_{(n-1)\times(n-1)}\end{pmatrix}}_{G}L_{1,i}(-\lambda).$$

而下一个乘法只改变 G 的第 i 列. 于是, 断言成立. 类似地可知, 当存在 $i>1$ 使得 $a_{1,i}\neq 0$., 断言也成立.

下面设 $a_{i,1}=a_{1,i}=0$, $i=2,3,\ldots,n$. 因为 $\operatorname{tr}(A)=0$ 且 $a_{1,1}\neq 0$, 所以存在 $i\in\{2,\ldots,n\}$ 使得 $a_{i,i}\neq 0$. 又因为 F 的特征等于零, 所以可以进一步假设 $a_{1,1}\neq a_{i,i}$.

把 A 看做从 F^n 到 F^n 的线性映射. 它在标准基 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵是 A. 我们考虑映射 A 在基底 $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵 B. 此时基变换为

$$(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n)=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n)L_{i,1}(1).$$

于是,

$$\begin{aligned}B&=L_{i,1}(-1)AL_{i,1}(1)\\&=\begin{pmatrix}a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{1,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,i} & \cdots & a_{i,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}L_{i,1}(1)=\begin{pmatrix}a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ a_{i,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i,i}-a_{1,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,i} & \cdots & a_{i,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i,n} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因为 $a_{i,i}-a_{1,1}\neq 0$, 所以我们回到已经处理过的情形. 断言成立.

下面我们对 n 归纳. 当 $n=1$ 时, $A=(0)$. 结论显然成立. 设 $n>1$ 且 $n-1$ 时结论成立. 由断言可知

$$A\sim_s\begin{pmatrix}0 & C_{1\times(n-1)}\\ D_{(n-1)\times 1} & H\end{pmatrix}.$$

因为 $\operatorname{tr}(A)=0+\operatorname{tr}(H)=0$, 所以 $\operatorname{tr}(H)=0$. 由归纳假设存在 $P\in\mathrm{GL}_{n-1}(F)$ 使得 $P^{-1}HP$ 的对角线上元素都等于零. 则

$$\begin{pmatrix}1 & O\\ O & Q^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & C_{1\times(n-1)}\\ D_{(n-1)\times 1} & H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & O\\ O & Q\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0 & *\\ * & Q^{-1}HQ\end{pmatrix}}_{N},$$

其中 $*$ 代表我们并不关心的矩阵. 由此得出, $A\sim_s N$ 且 N 的对角线上元素都等于零. $\square$

§3　基本例子

例 3.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}^2=2\mathcal{A}-\mathcal{E}$,

$$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

$f=t^2-2\in F[t]$. 计算 $f(\mathcal{A})$, $f(B)$ 和 μ_B.

解. 直接计算得

$$f(\mathcal{A})=\mathcal{A}^2-2\mathcal{E}=2\mathcal{A}-\mathcal{E}-2\mathcal{E}=2\mathcal{A}-3\mathcal{E}$$

和

$$f(B)=B^2-2E=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}-2E=\begin{pmatrix}-1&2\\0&-1\end{pmatrix}.$$

因为 B 不是数乘矩阵, 所以 μ_B 的次数至少是 2 次的. 设 $\mu_B(t)=t^2+\alpha_1t+\alpha_0$, 其中 $\alpha_1,\alpha_0\in F$ 待定. 由 $B^2+\alpha_1B+\alpha_0E=O$ 得

$$\begin{pmatrix}1+\alpha_1+\alpha_0&2+\alpha_1\\0&1+\alpha_1+\alpha_0\end{pmatrix}=O\iff\alpha_1=-2,\alpha_0=1.$$

于是 $\mu_B=t^2-2t+1$.

例 3.2 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $U\subset V$ 是 $\mathcal{A}$ 子空间. 证明: 对任意 $f\in F[t]$, U 是 $f(\mathcal{A})$ 不变的.

证明. 对 $k\in\mathbb{N}$ 归纳证明 U 是 $\mathcal{A}^k$-不变的. 对任意 $\mathbf{u}\in U$, $\mathcal{E}(\mathbf{u})=\mathbf{u}\in U$. 于是 $k=0$ 时结论成立. 设 $k>1$ 且结论对于 $k-1$ 成立. 则 $\mathcal{A}^k(\mathbf{u})=\mathcal{A}(\mathcal{A}^{k-1}(\mathbf{u}))$. 因为 $\mathcal{A}^{k-1}(\mathbf{u})\in U$ *(归纳假设)*, 所以 $\mathcal{A}^k(\mathbf{u})\in U$ *(U $\mathcal{A}$-不变)*.

设 $f=f_mt^m+\cdots+f_1t+f_0, f_i\in F$. 则 $f(\mathcal{A})(\mathbf{u})=f_m\mathcal{A}^m(\mathbf{u})+\cdots+f_1\mathcal{A}(\mathbf{u})+f_0\mathbf{u}$. 由上述结论 $f(\mathcal{A})(\mathbf{u})\in U$. □

例 3.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 在基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是

$$A=\begin{pmatrix}B&O\\O&C\end{pmatrix},$$

其中 $B\in\mathrm{M}_d(F), C\in\mathrm{M}_{n-d}(F)$. 证明: $U=\langle\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_d\rangle$, $W=\langle\mathbf{e}_{d+1},\ldots,\mathbf{e}_n\rangle$ 是 $\mathcal{A}$-子空间, 且 $V=U\oplus W$.

证明. 设 $\mathbf{x}\in U$. 则存在 $x_1,\ldots,x_d\in F$ 使得 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_d\mathbf{e}_d$. 令 $\mathbf{x}_d=(x_1,\ldots,x_d)^t$ 则 $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ 在该基底下的坐标等于

$$A\begin{pmatrix}\mathbf{x}_d\\\mathbf{0}_{n-d}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B&O\\O&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_d\\\mathbf{0}_{n-d}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B\mathbf{x}_d\\C\mathbf{0}_{n-d}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B\mathbf{x}_d\\\mathbf{0}_{n-d}\end{pmatrix}.$$

因为后 $(n-d)$ 个坐标都等于零, 所以 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \in U$, 即 U 是 $\mathcal{A}$-不变的. 类似地可证 W 是 $\mathcal{A}$-不变的.

因为 $\dim(U)=d$, $\dim(W)=n-d$, 且 $U+W=V$, 所以

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W).$$

由第一章第二讲命题 4.16, $V=U\oplus W$. $\Box$

§4 关于算子和向量的极小多项式

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V), \mathbf{v}\in V, f(t)\in F[t]$. 如果 $f(\mathcal{A})(\mathbf{v})=\mathbf{0}$, 则称 $f(t)$ 是通过 $\mathcal{A}$ 零化 $\mathbf{v}$ 的多项式. 非零、次数最小的通过 $\mathcal{A}$ 零化 $\mathbf{v}$ 的多项式称为通过 $\mathcal{A}$ 零化 $\mathbf{v}$ 的极小多项式. 该极小多项式记为 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}$, 它通常是首一的.

注意到 $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(\mathbf{v})=\mathcal{O}(\mathbf{v})=\mathbf{0}$. 于是, $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}$ 存在. 设 $f(\mathcal{A})(\mathbf{v})=\mathbf{0}$. 由多项式带余除法可知

$$f(t)=q(t)\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}(t)+r(t),$$

其中 $q,r\in F[t]$, $\deg(r)<\deg(\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}})$. 带入 $\mathcal{A}$ 得 $\mathcal{O}=q(\mathcal{A})\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}(\mathcal{A})+r(\mathcal{A})$. 两侧同时作用在 $\mathbf{v}$ 上得到

$$\mathbf{0}=q(\mathcal{A})\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}(\mathcal{A})(\mathbf{v})+r(\mathcal{A})(\mathbf{v})=\mathbf{0}+r(\mathcal{A})(\mathbf{v}).$$

于是, $r(\mathcal{A})(\mathbf{v})=\mathbf{0}$. 因为 $\deg(r)<\deg(\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}})$, 所以 $r(t)=0$. 由此得出 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}|f$. 特别地, $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}|\mu_{\mathcal{A}}$.

下面的结论有重要的应用.

命题 4.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则存在 $\mathbf{v}\in V$ 使得 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}=\mu_{\mathcal{A}}$.

该命题的证明要分几步走. 首先, 我们证明一个局部结果.

引理 4.2 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 且 $\mu_{\mathcal{A}}=p^k$, 其中 $p\in F[t]$ 不可约和首一. 则存在 $\mathbf{v}\in V$ 使得

$$\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}=\mu_{\mathcal{A}}.$$

证明. 因为 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}|\mu_{\mathcal{A}}$ 且 p 不可约, 所以 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}=p^{m_{\mathbf{v}}}$, 其中 $1\le m_{\mathbf{v}}\le k$. 假设不存在 $\mathbf{v}$ 使得 $m_{\mathbf{v}}=k$. 则对任意 $\mathbf{v}\in V$, $m_{\mathbf{v}}\le k-1$. 于是 $p^{k-1}=q_{\mathbf{v}}\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}$, 其中 $q_{\mathbf{v}}\in F[t]$. 我们有

$$p^{k-1}(\mathcal{A})=q_{\mathbf{v}}(\mathcal{A})\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}(\mathcal{A}) \implies p^{k-1}(\mathcal{A})(\mathbf{v})=q_{\mathbf{v}}(\mathcal{A})\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}(\mathcal{A})(\mathbf{v})=q_{\mathbf{v}}(\mathcal{A})\left(\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}(\mathcal{A})(\mathbf{v})\right)=\mathbf{0}.$$

由 $\mathbf{v}$ 的任意性得出 $p^{k-1}(\mathcal{A})=\mathcal{O}$. 矛盾. $\Box$

其次, 我们给出从局部结果过渡到整体结果的工具. 注意到第二章第二次讲义命题 6.5 说明对任意 $f\in F[t]$, $\ker(f(\mathcal{A}))$ 是 $\mathcal{A}$-不变的.

定理 4.3 *(扩展的核核分解定理)* 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), f(t) \in F[t] \setminus \{0\}$ 且 $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. 设 $f = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$ 是 f 在 $F[t]$ 中的不可约分解. 对 $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. 令 $K_i = \ker(p_i(\mathcal{A})^{m_i})$. $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{K_i}$. 则

$$V = K_1 \oplus \cdots \oplus K_s.$$

当 $f = \mu_{\mathcal{A}}$ 时, $\mu_{\mathcal{A}_i} = p_i^{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

证明. 对 s 归纳来证明直和分解部分. 当 $s = 1$ 时, 定理是平凡的. 设 $s > 1$ 且 $s - 1$ 时定理成立. 令 $p = p_1^{m_1} \cdots p_{s-1}^{m_{s-1}}$, 则 $\mu_{\mathcal{A}} = p p_s^{m_s}$ 且 $\gcd(p, p^{m_s}) = 1$ (第二章第二次讲义引理 5.5). 由核核分解定理(第二章第二次讲义定理 3.3), $V = K_p \oplus K_s$. 注意到 K_p 是 $\mathcal{A}$ 子空间(第二章第二次讲义命题 6.5), $p(\mathcal{A}_{K_p}) = \mathcal{O}$. 对 $K_p, \mathcal{A}_{K_p}, p$ 用归纳假设得到所需的直和分解.

再设 $f(t) = \mu_{\mathcal{A}}(t)$. 因为 $p_i(\mathcal{A}_i) = \mathcal{O}$, 所以 $\mu_{A_i} | p_i^{m_i}$ (第二章第二次讲义引理 4.2), $i = 1, 2, \ldots, s$. 于是, $\mu_{\mathcal{A}_1}, \ldots, \mu_{\mathcal{A}_s}$ 两两互素. 根据第二章第二次讲义定理 6.9,

$$\mu_{\mathcal{A}} = \operatorname{lcm}(\mu_{A_1}, \ldots, \mu_{A_s}) = \mu_{A_1} \cdots \mu_{A_s} \quad \text{(第二章第二次讲义命题 5.6)}.$$

于是,

$$p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s} = \mu_{\mathcal{A}_1} \cdots \mu_{\mathcal{A}_s}.$$

再利用 $\mu_{A_i} | p_i^{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots, s$ 可知, $\mu_{\mathcal{A}_i} = p_i^{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots, s$. □

命题 4.1 的证明. 利用上述定理的记号, 对 $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, $\mathcal{A}_i \in \mathcal{L}(K_i)$ 且 $\mu_{\mathcal{A}_i}$ 是 $F[t]$ 中一个不可约多项式的幂次. 根据引理 4.2, 存在 $\mathbf{v}_i \in K_i$ 使得 $\mu_{\mathcal{A}_i} = \mu_{\mathcal{A}_i, \mathbf{v}_i}$.

令 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_s$. 则,

$$\mathbf{0} = \mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}(\mathcal{A})(\mathbf{v}_1) + \cdots + \mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}(\mathcal{A})(\mathbf{v}_s).$$

因为 $V = K_1 \oplus \cdots \oplus K_s$, 且每个 K_i 都是 $\mathcal{A}$ 不变的, 所以 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}(\mathcal{A})(\mathbf{v}_i) \in K_i$. 由直和的基本性质(见第一章第一讲定理 1.12 (ii)), $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}(\mathcal{A})(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$. 于是, $\mu_{\mathcal{A}_i,\mathbf{v}_i} | \mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}$, $i = 1, 2, \ldots, s$. 由此可知, $\mu_{\mathcal{A}_i} | \mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}$, $i = 1, 2, \ldots, s$. 从而 $\mu_{\mathcal{A}} = \operatorname{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_1}, \ldots, \mu_{\mathcal{A}_s}) | \mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}$. 又因为 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}} | \mu_{\mathcal{A}}$. 我们有 $\mu_{\mathcal{A}} = \mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}$. □