第十一周习题课

§1 关于习题

3. 设 $C \in \mathrm{GL}_n(F)$, $\mathcal{A}: \mathrm{M}_n(F) \longrightarrow \mathrm{M}_n(F)$ 由公式 $\mathcal{A}(X) = C^{-1}XC$ 给出.

(i) 验证 $\mathcal{A}$ 是 $\mathrm{M}_n(F)$ 上的线性算子.

(ii) 验证对任意 $X, Y \in \mathrm{M}_n(F)$, $\mathcal{A}(XY) = \mathcal{A}(X)\mathcal{A}(Y)$.

(iii) 求 $\mathrm{rank}(\mathcal{A})$.

证明. (i), (ii) 略. (iii) 设 $\mathcal{A}(X) = \mathcal{O}$. 则 $C^{-1}XC = \mathcal{O}$. 于是, $X = \mathcal{O}$. 由第二章第一讲推论 1.19 可知, $\mathcal{A}$ 是满射. 故 $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{M}_n(F)) = n^2$. $\square$

6. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$. 证明:

(i) $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = \mathrm{rank}(\mathcal{BA}) + \dim(\mathrm{im}(\mathcal{A}) \cap \ker(\mathcal{B}))$.

(ii) 对于任意 $i \in \mathbb{Z}^+$, $\dim(\mathrm{im}(\mathcal{A}^{i-1}) \cap \ker \mathcal{A}) = \dim(\ker(\mathcal{A}^i)) - \dim(\ker(\mathcal{A}^{i-1}))$.

证明. (i) 令 $K_{\mathcal{A}} = \ker(\mathcal{A})$, $K_{\mathcal{BA}} = \ker(\mathcal{BA})$, $K_{\mathcal{B}} = \ker(\mathcal{B})$, $I_{\mathcal{A}} = \mathrm{im}(\mathcal{A})$. 再令 $n = \dim(V)$. 由核像维数公式可知，所需证明的等式等价于

$$n - \dim(K_{\mathcal{A}}) = n - \dim(K_{\mathcal{BA}}) + \dim(\mathrm{im}(\mathcal{A}) \cap \ker(\mathcal{B})),$$

化简为

$$\dim(\mathrm{im}(\mathcal{A}) \cap \ker(\mathcal{B})) = \dim(K_{\mathcal{BA}}) - \dim(K_{\mathcal{A}}). \tag{1}$$

定义

$$\begin{array}{rccc} \phi: & K_{\mathcal{BA}} & \longrightarrow & \mathrm{im}(\mathcal{A}) \cap \ker(\mathcal{B}) \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathcal{A}(\mathbf{x}) \end{array}.$$

先验证 ϕ 是良定义的. 显然, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \in I_{\mathcal{A}}$. 因为 $\mathbf{x} \in K_{\mathcal{BA}}$, 所以 $\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$. 于是 $\phi(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \in \mathrm{im}(\mathcal{A}) \cap \ker(\mathcal{B})$. 映射 ϕ 是良定义的.

因为 ϕ 是 $\mathcal{A}$ 在 $K_{\mathcal{BA}}$ 上的限制, 所以它是线性的. 因为 $K_{\mathcal{A}} \subset K_{\mathcal{BA}}$, 所以 $\ker(\phi) = K_{\mathcal{A}}$. 下面来验证 ϕ 是满射. 设 $\mathbf{v} \in I_{\mathcal{A}} \cap K_{\mathcal{B}}$. 因为 $\mathbf{v} \in I_{\mathcal{A}}$, 所以存在 $\mathbf{u} \in V$ 使得 $\mathbf{v} = \mathcal{A}(\mathbf{u})$. 因为 $\mathbf{v} \in K_{\mathcal{B}}$, 所以存在 $\mathbf{0} = \mathcal{B}(\mathbf{v}) = \mathcal{BA}(\mathbf{u})$. 于是, $\mathbf{u} \in K_{\mathcal{BA}}$. 因为 $\phi(\mathbf{u}) = \mathcal{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$. 由核像维数公式 $\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = \dim(K_{\mathcal{BA}})$ 可知

$$\dim(K_{\mathcal{A}}) + \dim(\mathrm{im}(\mathcal{A}) \cap \ker(\mathcal{B})) = \dim(K_{\mathcal{BA}}). \quad \square$$

(ii) 在 (1) 中, 把 $\mathcal{A}$ 替换成 $\mathcal{A}^{i-1}$, 把 $\mathcal{B}$ 替换成 $\mathcal{A}$ 即可. □

(i) 的另证. 设 $\phi = \mathcal{B}|_{I_{\mathcal{A}}}$. 则由核像维数公式

$$\dim(I_{\mathcal{A}} \cap K_{\mathcal{B}}) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = \dim(I_{\mathcal{A}}) = \mathrm{rank}(\mathcal{A}).$$

而 $\mathrm{im}(\phi) = \mathcal{B}(I_{\mathcal{A}}) = \mathcal{B}\mathcal{A}(V) = \mathrm{im}(\mathcal{B}\mathcal{A})$. 于是,

$$\dim(\mathrm{im}(\phi)) = \mathrm{rank}(\mathcal{B}\mathcal{A}).$$

结合这两个关于维数和秩的等式证明 (i). □

§2 基本例子(计算)

例 2.1 计算下列实矩阵在 $\mathbb{R}^2$ 中的特征向量.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad 和 \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

其中 $\theta \in (0, 2\pi)$.

解. 计算

$$\chi_A(t) = \begin{pmatrix} t-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & t-\cos\theta \end{pmatrix} = t^2 - 2(\cos\theta)t + 1.$$

该多项式的判别式等于 $4(\cos\theta)^2 - 4 \le 0$.

当 $\theta \neq \pi$ 时, A 无实特征根, 故没有特征向量.

当 $\theta = \pi$ 时, $\chi_A(t) = t^2 + 2t + 1$. 于是, $\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1\}$. 此时, $A = -E_2$ 是数乘矩阵. 于是, $\mathbb{R}^2$ 中任何非零向量都是 A 的关于 -1 的特征向量*(第二章第三讲例 8.4)*.

计算

$$\chi_B(t) = \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & t+1 \end{pmatrix} = t^2 - 1.$$

于是, $\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(B) = \{-1, 1\}$.

特征子空间 V^{-1} 是

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的解空间. 于是, $V^{-1} = \{(0, c)^t \mid c \in \mathbb{R}\}$. 特征子空间 V^1 是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的解空间. 于是, $V^{-1} = \{(c, 0)^t \mid c \in \mathbb{R}\}$.

矩阵 B 的特征向量是 $\left(V^{-1} \cup V^1\right) \setminus \{\mathbf{0}\}$.

例 2.2 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

(i) 计算 A 的所有实特征根和实特征向量;

(ii) 计算 A 的所有复特征根和复特征向量.

解. 计算

$$\chi_A(t)=\begin{pmatrix}t-1&0&-1\\0&t-1&0\\1&0&t-1\end{pmatrix}=(t-1)(t^2-2t+2).$$

于是, $\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(A)=\{1\}$, $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)=\{1,1+\sqrt{-1},1-\sqrt{-1}\}$.

(i) V^1 是方程组

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

的解空间. 于是, $V^1=\{(0,c,0)^t\,|\,c\in\mathbb{R}\}$, A 的实特征向量是 $(0,c,0)^t$, 其中 $c\neq 0$. 它们对应的特征值都是 1.

(ii) 由 *(i)* 中计算可知, $V^1=\{(0,c,0)^t\,|\,c\in\mathbb{C}\}$. 特征子空间 $V^{1+\sqrt{-1}}$ 是方程组

$$\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&0&-1\\0&\sqrt{-1}&0\\1&0&\sqrt{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

的解空间.

于是, $V^{1+\sqrt{-1}}=\{c(1,0,\sqrt{-1})^t\,|\,c\in\mathbb{C}\}$. 类似地, $V^{1-\sqrt{-1}}=\{c(1,0,-\sqrt{-1})^t\,|\,c\in\mathbb{C}\}$. 矩阵 A 的特征向量是 $(V^1\cup V^{1+\sqrt{-1}}\cup V^{1-\sqrt{-1}})\setminus\{\mathbf{0}\}$.

例 2.3 计算矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-f_{n-1}&1&0&\cdots&0\\-f_{n-2}&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-f_1&0&0&\cdots&1\\-f_0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix},$$

其中 $f_0,f_1,\ldots,f_{n-1}\in F$ 的特征多项式.

解. 按第一列展开下列行列式得

$$\begin{pmatrix} t+f_{n-1} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ f_{n-2} & t & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ f_0 & 0 & 0 & \cdots & t \end{pmatrix} = (t+f_{n-1})t^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} f_{n-i} (-1)^{i-1} t^{n-i}.$$

于是, $\chi_A(t) = t^n + f_{n-1}t^{n-1} + \cdots + f_1 t + f_0$.

例 2.4 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$ 且 $\mathrm{rank}(A) = 1$. 计算 $\mathrm{spec}_F(A)$.

解. 因为 $\mathrm{rank}(A) = 1$, 所以 A 的二阶子式都等于零. 由此得出

$$\chi_A(t) = t^n - \mathrm{tr}(A)t^{n-1}$$

(见第二章第三讲定义 8.14 后的一段). 如果 $\mathrm{tr}(A) = 0$, 则 $\mathrm{spec}_F(A) = \{0\}$. 否则 $\mathrm{spec}_F(A) = \{0, \mathrm{tr}(A)\}$. □

§3 基本例子(证明)

例 3.1 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 证明:

(i) $\chi_A(0) \neq 0$ 当且仅当 A 可逆;

(ii) $\chi_A = \chi_{A^t}$.

证明. *(i)* 注意到 $\chi_A(0) = \det(A)$ (见第二章第三讲命题 8.13). *(i)* 自然成立.

(ii) 直接计算得

$$\chi_A(t) = |tE - A| = |(tE-A)^t| = |tE - A^t| = \chi_{A^t}(t). \quad \square$$

例 3.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\alpha, \beta \in \mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$ 且 $\alpha \neq \beta$. 设 $\mathbf{u} \in V^\alpha, \mathbf{v} \in V^\beta$ 是两个非零向量. 证明: $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 不是 $\mathcal{A}$ 的特征向量.

证明. 假设 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量. 则存在 $\lambda \in F$ 使得 $\mathcal{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})$. 另一方面,

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathcal{A}(\mathbf{u}) + \mathcal{A}(\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}.$$

于是, $(\lambda-\alpha)\mathbf{u} + (\lambda-\beta)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. 因为 $\alpha \neq \beta$, 所以不妨假设 $\lambda - \alpha \neq 0$. 由此得出, $\mathbf{u} = \xi\mathbf{v}$, 其中 $\xi = -(\lambda-\beta)(\lambda-\alpha)^{-1}$. 于是 $\mathbf{u} \in V^\beta$, 即 $\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \beta\mathbf{u}$. 从而我们有 $\alpha\mathbf{u} = \beta\mathbf{u}$. 因为 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, 所以 $\alpha = \beta$. 矛盾. □

另证. 假设 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量. 则存在 $\lambda\in F$ 使得 $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in V^{\lambda}$. 若 $\lambda=\alpha$, 则 $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in V^{\alpha}$. 于是, $\mathbf{v}\in V^{\alpha}$. 矛盾. 同理 $\lambda\neq\beta$. 由第二章第三讲引理 *9.7*, $V^{\alpha}+V^{\beta}+V^{\lambda}$ 是直和. 于是, $(V^{\alpha}+V^{\beta})\cap V^{\lambda}=\{\mathbf{0}\}$ *(*第一章第一讲定理 *1.12 (iii))*. 由此得出, $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{0}$. 故 $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in V^{\alpha}$. 矛盾. □

例 3.3 举例说明特征向量不是相似不变量.

解 设

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

计算得 $\chi_A=t^2-1$. 所以 $\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(A)=\{1,-1\}$. 于是 $V^1=\langle(1,1)^t\rangle$ 和 $V^{-1}=\langle(1,-1)^t\rangle$. 设

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

进而

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

但 A 的特征向量 $(1,1)^t$ 不是 B 得特征向量.

例 3.4 设 $A,B\in \mathrm{M}_n(F)$ 相似, $\lambda\in\mathrm{spec}_F(A)$. 则 $\lambda\in\mathrm{spec}_F(B)$ 且 $\dim V_A^{\lambda}=\dim V_B^{\lambda}$, 其中 V_A^{λ} 和 V_B^{λ} 分别代表 A 和 B 关于 λ 的特征子空间.

证明. 设 $P\in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B=P^{-1}AP$. 定义*:*

$$\begin{array}{cccc}\phi: & V_A^{\lambda} & \longrightarrow & V_B^{\lambda}\\ & \mathbf{x} & \mapsto & P^{-1}\mathbf{x}.\end{array}$$

我们只需验证 ϕ 是线性同构.

首先验证良定义. 因为 $B=P^{-1}AP$, 所以 $BP^{-1}=P^{-1}A$. 对任意 $\mathbf{x}\in V_A^{\lambda}$,

$$B(P^{-1}\mathbf{x})=(BP^{-1})\mathbf{x}=(P^{-1}A)\mathbf{x}=P^{-1}(A\mathbf{x})=P^{-1}(\lambda\mathbf{x})=\lambda(P^{-1}\mathbf{x}).$$

于是, $\phi(\mathbf{x})=P^{-1}\mathbf{x}\in V_B^{\lambda}$. 映射 ϕ 是良定义的. 其线性性由矩阵乘法直接可得. 定义*:*

$$\begin{array}{cccc}\psi: & V_B^{\lambda} & \longrightarrow & V_A^{\lambda}\\ & \mathbf{x} & \mapsto & P\mathbf{x}.\end{array}.$$

同样可以验证 ψ 是良定义的. 因为 $PP^{-1}=P^{-1}P=E$, 所以 $\phi\circ\psi$ 和 $\psi\circ\phi$ 都是恒同映射. 故 ϕ 是线性同构. 特别地, $\dim V_A^{\lambda}=\dim V_B^{\lambda}$. □

§4 关于不变量

定义 4.1 设 $A, B \in F^{m\times n}$. 如果存在 $P \in \mathrm{GL}_m(F)$ 和 $Q \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B = PAQ$, 则称 A 与 B 初等等价, 记为 $A \sim_e B$.

矩阵的秩是初等不变量. 事实上, $A \sim_e B \iff \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ (见第一学期第二章第五讲定理 6.1 (ii)). 此时, 秩是(一组)关于初等等价的完全不变量.

定义 4.2 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 如果存在 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B = P^t AP$, 则称 A 与 B 合同, 记为 $A \sim_c B$.

矩阵的秩是合同不变量, 对称和斜对称性也是合同不变量.

- 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{C})$. 则 $A \sim_c B \iff \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ (见第一章第四讲例 7.19). 即对于复对称矩阵而言, 秩是(一组)关于合同等价的完全不变量.
- 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则 $A \sim_c B \iff$ 它们的签名相同 (见第一章第五讲定理 9.1). 即对于实对称矩阵而言, 签名是(一组)关于合同等价的完全不变量.
- 设 $A, B \in \mathrm{SSM}_n(F)$, 其中 F 的特征不等于 2. 则 $A \sim_c B \iff \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ (见第一章第七讲推论 11.8). 即对于斜对称矩阵而言, 秩是(一组)关于合同等价的完全不变量.

定义 4.3 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 如果存在 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$, 则称 A 与 B 相似, 记为 $A \sim_s B$.

矩阵的秩, 迹, 行列式, 各阶主子式之和, 极小多项式, 特征多项式, 特征根是相似不变量(分别见第二章第一讲命题 2.5, 第二讲命题 4.9, 第三讲定义 8.6 和 8.14 的下一段). 一组完全相似不变量将在今后给出.

定义 4.4 设 $f : \mathrm{M}_n(F) \longrightarrow S$ 的映射, 其中 S 是一个集合. 如果对任意 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$, $f(AB) = f(BA)$, 则称 f 是关于方阵的交换不变量.

矩阵的迹, 行列式是交换不变量(分别见第二章第一讲命题 2.5 的证明和第一学期第三章第一讲定理 2.3).

命题 4.5 矩阵的特征多项式是交换不变量.

证明. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 我们要证明 $\chi_{AB}(t) = \chi_{BA}(t)$.

当 A 可逆时, $AB \sim_s BA$ (见第二章第二次习题课讲义例 2.1 (i)). 因为特征多项式是相似不变量, 所以 $\chi_{AB}(t) = \chi_{BA}(t)$.

下面我们用摄动法证明一般情形. 令 z 是 F 上一个新的未定元, $p(z)=\det(zE+A)$. 则 $p\in F[z]$ 是 n 次首一多项式. 特别地, $p\neq 0$. 设 $K=F(z)$, 即整环 $F(z)$ 的分式域. 则 $A,B,zE+A\in \mathrm{M}_n(F)$, 且 $zE+A$ 在 $\mathrm{M}_n(K)$ 中可逆. 根据上一段的结论, 我们有

$$|tE-(zE+A)B|=|tE-B(zE+A)|.$$

上式是两个 $F[z,t]$ 中的二元多项式恒等. 于是, 带入 $z=0$ 是必然也相等. 由于把 z 带入一个值是(赋值)同态, 我们得到 $|tE-AB|=|tE-BA|$, 即 $\chi_{AB}(t)=\chi_{BA}(t)$. □

注解 4.6 由上述命题可知, 各阶主子式之和与特征根也是交换不变量.

例 4.7 极小多项式不是交换不变量. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad 和 \quad B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

直接计算得 $\mathrm{rank}(AB)=1$ 和 $\mathrm{rank}(BA)=0$. 于是 $\mu_{BA}=t$ 但 $\mu_{AB}\neq t$. 事实上, $\mu_{AB}=t^2$.