第十二周习题课

符号约定. 如果不加特殊声明, V 是域 F 上的 n 维线性空间.

§1 关于习题

2. 设

$$J_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}J_2&O\\O&O\end{pmatrix}_{4\times 4},\ B=\begin{pmatrix}J_2&O\\O&E_2\end{pmatrix}_{4\times 4},\ C=\begin{pmatrix}J_2&O\\O&\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}_{4\times 4}.$$

计算 μ_A, μ_B 和 μ_C.

解. 首先计算得 $\mu_{J_2}=t^2$, $\mu_O=t$, $\mu_E=t-1$, $\mu_M=(t-2)t$, 其中

$$M=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

于是,

$$\mu_A=\operatorname{lcm}(\mu_{J_2},\mu_O)=\operatorname{lcm}(t^2,t)=t^2,\ \mu_B=\operatorname{lcm}(\mu_{J_2},\mu_E)=\operatorname{lcm}(t^2,t-1)=t^2(t-1),$$

$$\mu_C=\operatorname{lcm}(\mu_{J_2},\mu_M)=\operatorname{lcm}(t^2,t(t-2))=t^2(t-2).\quad\square$$

6. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 证明下列结论.

(i) $\ker(\mathcal{A}^0)\subset\ker(\mathcal{A})\subset\ker(\mathcal{A}^2)\subset\cdots$ 和 $\operatorname{im}(\mathcal{A}^0)\supset\operatorname{im}(\mathcal{A})\supset\operatorname{im}(\mathcal{A}^2)\supset\cdots$.

(ii) 存在 $k\in\mathbb{N}$, 使得 $\ker(\mathcal{A}^k)=\ker(\mathcal{A}^{k+1})$. 此时对任意 $i\in\mathbb{N}$, 有

$$\ker(\mathcal{A}^k)=\ker(\mathcal{A}^{k+i})\quad 和\quad \operatorname{im}(\mathcal{A}^k)=\operatorname{im}(\mathcal{A}^{k+i}).$$

(iii) 设 k 如 *(ii)* 所述. 则 $\ker(\mathcal{A}^k)\oplus\operatorname{im}(\mathcal{A}^k)=V$.

证明. (i) 设 $i\in\mathbb{N}$. 如果 $\mathbf{x}\in\ker(\mathcal{A}^i)$, 则 $\mathcal{A}^i(\mathbf{x})=\mathbf{0}$. 于是,

$$\mathcal{A}^{i+1}(\mathbf{x})=\mathcal{A}(\mathcal{A}^i(\mathbf{x}))=\mathcal{A}(\mathbf{0})=\mathbf{0}.$$

由此得出 $\ker(\mathcal{A}^i)\subset\ker(\mathcal{A}^{i+1})$. 故我们有

$$\ker(\mathcal{A}^0)\subset\ker(\mathcal{A})\subset\ker(\mathcal{A}^2)\subset\cdots.$$

如果 $\mathbf{x} \in \mathrm{im}(\mathcal{A}^{i+1})$, 则存在 $\mathbf{y} \in V$ 使得 $\mathbf{x} = \mathcal{A}^{i+1}(\mathbf{y})$. 于是, $\mathbf{x} = \mathcal{A}^{i}(\mathcal{A}(\mathbf{y})) \in \mathrm{im}(\mathcal{A}^{i})$. 由此可知, $\mathrm{im}(\mathcal{A}^{i+1}) \subset \mathrm{im}(\mathcal{A}^{i})$. 故

$$\mathrm{im}(\mathcal{A}^0) \supset \mathrm{im}(\mathcal{A}) \supset \mathrm{im}(\mathcal{A}^2) \supset \cdots.$$

(ii) 由 $\ker(\mathcal{A}^0) \subset \ker(\mathcal{A}) \subset \ker(\mathcal{A}^2) \subset \cdots$, 我们得到无穷递增序列:

$$\dim(\ker(\mathcal{A}^0)) \leq \dim(\ker(\mathcal{A})) \leq \dim(\ker(\mathcal{A}^2)) \leq \cdots \tag{1}$$

因为该序列中每一项都不大于 $\dim(V)$, 所以存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得对任意 $i \in \mathbb{Z}^+$

$$\dim(\ker(\mathcal{A}^k)) = \dim(\ker(\mathcal{A}^{k+i})).$$

由此和 (i) 得出 $\ker(\mathcal{A}^k) = \ker(\mathcal{A}^{k+i})$. 由核像维数公式和 (1) 可知, 对任意 $i \in \mathbb{Z}^+$,

$$\dim(\mathrm{im}(\mathcal{A}^k)) = \dim(\mathrm{im}(\mathcal{A}^{k+i})).$$

由此和 (i) 得出 $\mathrm{im}(\mathcal{A}^k) = \mathrm{im}(\mathcal{A}^{k+i})$.

(iii) 因为 $\mathrm{im}(\mathcal{A}^k) = \mathrm{im}(\mathcal{A}^{2k})$, 所以 $\mathrm{rank}(\mathcal{A}^k) = \mathrm{rank}(\mathcal{A}^{2k})$. 根据核像分解定理 I, $\ker(\mathcal{A}^k) \oplus \mathrm{im}(\mathcal{A}^k) = V$. $\square$

§2 基本例子

例 2.1 设有理域上矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

是否可以对角化? 如果可以, 求可逆矩阵 $P \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$ 使得 $P^{-1}AP$ 或 $P^{-1}BP$ 是对角阵.

解. 直接计算得

$$\chi_A(t) = (t-5)(t+1)^2, \quad \chi_B(t) = (t-10)(t-1)^2.$$

考虑矩阵 A. 因为 5 的代数重数等于 1, 所以 $\dim(V^5) = 1$.

$$\mathrm{rank}(-E - A) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow \dim(V^{-1}) = 1.$$

由对角化判别法 II, A 不能对角化.

考虑矩阵 B. 因为 10 的代数重数等于 1, 所以 $\dim(V^{10})=1$.

$$\operatorname{rank}(E-B)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}-4&-4&-2\\-4&-4&-2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}=1 \Longrightarrow \dim(V^1)=2.$$

由对角化判别法*II*, B 可对角化.

计算特征向量

$$10E-B=\begin{pmatrix}5&-4&-2\\-4&5&-2\\-2&-2&8\end{pmatrix}\Longrightarrow V^{10}=\langle\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\rangle$$

和

$$E-B=\begin{pmatrix}-4&-4&-2\\-4&-4&-2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}\Longrightarrow V^1=\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\rangle.$$

矩阵

$$P=\begin{pmatrix}2&0&1\\2&1&0\\1&-2&-2\end{pmatrix},$$

其中 $\vec{P}^{(1)}\in V^{10}$, $\vec{P}^{(2)},\vec{P}^{(3)}\in V^1$.

例 2.2 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ 在标准基下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

计算 $\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{v}$ 的一组基.

解. 计算得 $\mathcal{A}^0(\mathbf{v})=\mathbf{v}$, $\mathcal{A}(\mathbf{v})=A\mathbf{v}=(2,0,1)^t$. 它们是线性无关的. 再计算

$$\mathcal{A}^2(\mathbf{v})=A(2,0,1)^t=(2,1,2)^t.$$

直接验证可得 $\mathbf{v},\mathcal{A}(\mathbf{v}),\mathcal{A}^2(\mathbf{v})$ 是线性无关的. 这三个向量构成 $\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{v}$ 的一组基. □

例 2.3 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 是循环算子, $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$. 证明: $\mathcal{B}\in F[\mathcal{A}]$.

证明. 设 $V=F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{v}$. 则 $\mathbf{v},\mathcal{A}(\mathbf{v}),\cdots,\mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})$ 是 V 的一组基(第二章第四讲命题 *10.2 (iii)*). 根据第二章第四讲命题 *10.2 (i)*, 存在 $f\in F[t]$ 使得 $\mathcal{B}(\mathbf{v})=f(\mathcal{A})(\mathbf{v})$. 则对于任意 $k\in\mathbb{Z}^+$, 我们有

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}^k(\mathbf{v}))\overset{(\because\mathcal{AB}=\mathcal{BA})}{=}\mathcal{A}^k(\mathcal{B}(\mathbf{v}))=\mathcal{A}^kf(\mathcal{A})(\mathbf{v})=f(\mathcal{A})(\mathcal{A}^k(\mathbf{v})).$$

于是, $\mathcal{B}$ 和 $f(\mathcal{A})$ 在上述基底中每个向量下的像相同. 根据线性映射基本定理*II* (第一章第二讲定理 *4.12*), $\mathcal{B} = f(\mathcal{A})$. $\square$

例 2.4 设 $n > 1$ 且

$$\begin{array}{cccc} \phi: & \mathrm{M}_n(F) & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(F) \\ & A & \mapsto & A^t \end{array}.$$

(i) 验证 ϕ 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 上的线性算子*;*

(ii) 求 $\mathrm{rank}(\phi)$*;*

(iii) 计算 ϕ 的特征根和特征子空间*;*

(iv) 确定 ϕ 是不是可对角化.

解. *(i)* 因为对任意 $\alpha, \beta \in F$, $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t$. 所以 ϕ 线性.

(ii) 因为 $\phi^2 = \mathcal{E}$, 所以 ϕ 可逆. 于是, $\mathrm{rank}(\phi) = n^2$.

(iii) 当 F 的特征不等于 2. 因为 $n > 1$, 所以 ϕ 不是数乘算子. 于是, $\mu_{\mathcal{A}} = t^2 - 1$. 由第二章第四讲推论 *10.12*, $\mathrm{spec}_F(\phi) = \{1, -1\}$. 注意到 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$ 当且仅当 $\phi(A) = A$. 于是, 1 是特征根且 $V^1 = \mathrm{SM}_n(F)$. 类似地, $A \in \mathrm{SSM}_n(F)$ 当且仅当 $\phi(A) = -A$.

当 F 的特征等于 2. 因为 $n > 1$, 所以 ϕ 不是数乘算子. 于是, $\mu_{\mathcal{A}} = (t-1)^2$. 由第二章第四讲推论 *10.12*, $\mathrm{spec}_F(\phi) = \{1\}$. 注意到 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$ 当且仅当 $\phi(A) = A$. 于是, 1 是特征根且 $V^1 = \mathrm{SM}_n(F)$.

(iv) 由第二章第四讲例 *9.23*, 当 F 的特征不等于 2 时, ϕ 可对角化. 否则, 不可对角化. $\square$

(iii), (iv) 的另解. 设 $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. A 的向量化是指

$$\mathrm{vec}(A) = (a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}, b_1, c_1, \ldots, b_{n(n-1)/2}, c_{n(n-1)/2})^t,$$

其中 b_k, c_k 分别代表 $a_{i,j}, a_{j,i}$, $(i < j)$ 且 $b_1, c_1, \ldots, b_{n(n-1)/2}, c_{n(n-1)/2}$ 与 A 中非对角线上的元素一一对应. 则

$$\mathrm{vec}(A^t) = (a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}, c_1, b_1, \ldots, c_{n(n-1)/2}, b_{n(n-1)/2}).$$

设 ϕ 在标准基下的矩阵是 $B \in \mathrm{M}_{n^2}(\mathbb{R})$. 则

$$\mathrm{vec}(A^t) = \begin{pmatrix} E_n & O & O & \cdots & O \\ O & T_2 & O & \cdots & O \\ O & O & T_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & T_2 \end{pmatrix} \mathrm{vec}(A), \quad \text{其中 } T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\chi_\phi(t)=(t-1)^n(t^2-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}=(t-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(t+1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. 由此得出当 F 的特征不等于 2 时, $\operatorname{spec}_F(\phi)=\{1,-1\}$. 否则, $\operatorname{spec}_F(\phi)=\{1\}$.

当 F 的特征不等于 2 时, $\operatorname{rank}(E-B)=n(n-1)/2$, $\operatorname{rank}(-E-B)=n(n+1)/2$. 于是, $\dim(V^1)=n(n+1)/2$, $\dim(V^{-1})=n(n-1)/2$. 由此得出, $\dim(V^1)+\dim(V^{-1})=n^2$. 由对角化判别准则*III*, ϕ 可对角化.

当 F 的特征等于 2 时, $\operatorname{rank}(E-B)=n(n-1)/2$. 于是, $\dim(V^1)=n(n+1)/2<n^2$. 由对角化判别准则*III*, ϕ 不可对角化. □

§3 谱分解定理

定理 3.1 *(科斯特利金第二卷 117 页)* 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 可对角化. 则

(i) 存在唯一的 $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in F$, 两两不同, 和完全正交等方组 $\pi_1,\dots,\pi_k$ 满足

$$\mathcal{A}=\lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_k\pi_k;$$

(ii) 存在 $f_1,\dots,f_k\in F[t]$ 满足 $f_i(\lambda_j)=\delta_{i,j}$, $\pi_i=f_i(\mathcal{A})$, $i,j\in\{1,2,\dots,k\}$.

证明. (i) 因为 $\mathcal{A}$ 可对角化, 所以

$$V=V^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_k}, \tag{2}$$

其中 $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ 是 $\mathcal{A}$ 的互不相同的特征值. (见对角化判别法II). 设 π_i 是关于上述直和的第 i 个投影, $i=1,2,\dots,k$. 则 $\pi_1,\dots,\pi_k$ 是完全正交等方组(第一章第七讲命题 12.2). 对任意 $\mathbf{x}\in V$. 由 (2) 可知, 存在 $\mathbf{x}_1\in V_1^\lambda,\dots,\mathbf{x}_k\in V_k^\lambda$ 使得

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\cdots+\mathbf{x}_k.$$

于是

$$\mathcal{A}(\mathbf{x})=\mathcal{A}(\mathbf{x}_1)+\cdots+\mathcal{A}(\mathbf{x}_k)=\lambda_1\mathbf{x}_1+\cdots+\lambda_k\mathbf{x}_k.$$

因为 $\pi_i(\mathbf{x})=\mathbf{x}_i$, $i=1,2,\dots,k$, 所以

$$\mathcal{A}(\mathbf{x})=\lambda_1\pi_1(\mathbf{x})+\cdots+\lambda_k\pi_k(\mathbf{x})=(\lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_k\pi_k)(\mathbf{x}).$$

由 $\mathbf{x}$ 的任意性可知, $\mathcal{A}=\lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_k\pi_k$. 存在性成立.

再设 $\sigma_1,\dots,\sigma_m$ 是一个完全正交等方组满足 $\mathcal{A}=\alpha_1\sigma_1+\cdots+\alpha_m\sigma_m$, 其中 $\alpha_1,\dots,\alpha_m\in F$, 两两不同. 根据 第一章第七讲命题 12.4,

$$V=\operatorname{im}(\sigma_1)\oplus\cdots\oplus\operatorname{im}(\sigma_m) \tag{3}$$

且 σ_i 是关于该直和的第 i 个投影, $i=1,2,\ldots,m$. 设 $\mathbf{x}_1\in\mathrm{im}(\sigma_1)\setminus\{\mathbf{0}\}$. 则存在 $\mathbf{y}_1\in V$ 使得 $\mathbf{x}_1=\sigma_1(\mathbf{y}_1)$. 于是

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{x}_1)&=(\alpha_1\sigma_1+\alpha_2\sigma_2\cdots+\alpha_m\sigma_m)(\sigma_1(\mathbf{y}_1))\\&=\alpha_1\sigma_1^2(\mathbf{y}_1)+\alpha_2\sigma_2\sigma_1(\mathbf{y}_1)+\cdots+\alpha_m\sigma_m\sigma_1(\mathbf{y}_1)\\&=\alpha_1\sigma_1(\mathbf{y}_1)\quad(\text{正交等方})\\&=\alpha_1\mathbf{x}_1.\end{aligned}$$

于是, α_1 是 $\mathcal{A}$ 的特征值 且 $\mathbf{x}_1\in V^{\alpha_1}$. 但 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ 是 $\mathcal{A}$ 全部的特征值. 故不妨设 $\alpha_1=\lambda_1$. 由此得出 $\mathrm{im}(\sigma_1)\subset V^{\lambda_1}$. 类似地, 适当调整下标后我们可证 $\alpha_i=\lambda_i$ 且 $\mathrm{im}(\sigma_i)\subset V^{\lambda_i}$, $i=2,3,\ldots,m$. 特别地, $m\le k$. 由 (2), (3) 和上述包含关系得出

$$\begin{array}{ccccccccccc}V&=&V^{\lambda_1}&\oplus&\cdots&\oplus&V^{\lambda_m}&\oplus&\cdots&\oplus&V^{\lambda_k}\\&&\bigcup&&\cdots&&\bigcup&&&&\\V&=&\mathrm{im}(\sigma_1)&\oplus&\cdots&\oplus&\mathrm{im}(\sigma_m)&&&&\end{array}.$$

由此得出 $k=m$. 即

$$\begin{array}{ccccccc}V&=&V^{\lambda_1}&\oplus&\cdots&\oplus&V^{\lambda_k}\\&&\bigcup&&\cdots&&\bigcup\\V&=&\mathrm{im}(\sigma_1)&\oplus&\cdots&\oplus&\mathrm{im}(\sigma_k)\end{array}.\tag{4}$$

根据第一章第二讲命题 4.16, 我们有

$$\begin{array}{ccccccc}\dim(V)&=&\dim(V^{\lambda_1})&+&\cdots&+&\dim(V^{\lambda_k})\\&&\bigvee\|&&\cdots&&\bigvee\|\\\dim(V)&=&\dim(\mathrm{im}(\sigma_1))&+&\cdots&+&\dim(\mathrm{im}(\sigma_k))\end{array}.$$

于是,

$$\begin{array}{ccccccc}\dim(V)&=&\dim(V^{\lambda_1})&+&\cdots&+&\dim(V^{\lambda_k})\\&&\|&&\cdots&&\|\\\dim(V)&=&\dim(\mathrm{im}(\sigma_1))&+&\cdots&+&\dim(\mathrm{im}(\sigma_k))\end{array}.$$

由 (4) 得出

$$\begin{array}{ccccccc}V&=&V^{\lambda_1}&\oplus&\cdots&\oplus&V^{\lambda_k}\\&&\|&&\cdots&&\|\\V&=&\mathrm{im}(\sigma_1)&\oplus&\cdots&\oplus&\mathrm{im}(\sigma_k)\end{array}.$$

我们证明了 $k=m,\alpha_i=\lambda_i$, $\sigma_i=\pi_i$, $i=1,2,\ldots,k$. 唯一性成立.

(ii) 对 $i=1,2,\ldots,k$, 设

$$f_i(t)=\frac{(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_{i-1})(t-\lambda_{i+1})\cdots(t-\lambda_k)}{(\lambda_i-\lambda_1)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i-\lambda_k)}\in F[t].$$

则 $f_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. 设 $g(t) = g_d t^d + \cdots + g_1 t + g_0 \in F[t]$, 其中 $g_0, g_1, \ldots, g_d \in F$.

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{A}) &= \sum_{i=0}^{d} g_i \mathcal{A}^i \\
&= \sum_{i=0}^{d} g_i (\lambda_1 \pi_1 + \cdots \lambda_k \pi_k)^i \\
&= \sum_{i=0}^{d} g_i (\lambda_1^i \pi_1 + \cdots + \lambda_k^i \pi_k) \quad \text{(第一章第七次作业题 4)} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{d} g_i \lambda_1^i \right) \pi_1 + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{d} g_i \lambda_k^i \right) \pi_k \\
&= g(\lambda_1)\pi_1 + \cdots + g(\lambda_k)\pi_k.
\end{aligned}$$

于是, 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $f_i(\mathcal{A}) = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{f_i(\lambda_j)}_{\delta_{i,j}} \pi_j = \pi_i$. $\square$