第十三周习题课

符号约定. 如果不加特殊声明, V 是域 F 上的 n 维线性空间.

§1 关于习题

5. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}^5-\mathcal{A}^3=3\mathcal{A}$. 证明: 当 F 的特征不等于 3 时,

$$\ker(\mathcal{A})\oplus\mathrm{im}(\mathcal{A})=V.$$

证明. 设 $f(t)=t^5-t^3-3t\in F[t]$. 则 $f(\mathcal{A})=\mathcal{O}$. 因为 $3t\neq 0$, 所以 t 在 $f(t)$ 中的重数等于 1. 因为 $\mu_{\mathcal{A}}(t)|f(t)$ (第二章第二讲引理 4.2), 所以 t 在 $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ 中的重数不大于 1. 由核像分解定理 II (第二章第二讲定理 6.10) 可知:

$$\ker(\mathcal{A})\oplus\mathrm{im}(\mathcal{A})=V.\quad\square$$

§2 计算实例

例 2.1 设 $n\geq 2$, $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(F^n)$ 在标准基 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&0\\1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}.$$

(i) 确定 F^n 是不是 $\mathcal{A}$-循环的, 如果是, 求 F^n 的一个关于 $\mathcal{A}$-的循环向量, 确定 F^n 是不是 $\mathcal{A}$-不可分的.

(ii) 确定 F^n 是不是 $\mathcal{A}^2$-循环的, 如果是, 求 F^n 的一个关于 $\mathcal{A}^2$-的循环向量, 确定 F^n 是不是 $\mathcal{A}^2$-不可分的.

解. *(i)* 设 $B\in F^{m\times n}$. 则

$$BA=(\vec{B}^{(1)},\vec{B}^{(2)},\dots,\vec{B}^{(n)})\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&0\\1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}=(\vec{B}^{(2)},\vec{B}^{(3)},\dots,\vec{B}^{(n)},\mathbf{0}_n).\qquad(1)$$

由此可知,

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0&0\\0&0&\cdots&0&0&0\\1&0&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&0\end{pmatrix},\quad A^3=(\vec{A}^{(3)},\vec{A}^{(4)},\ldots,\vec{A}^{n-1},\mathbf{0}_n,\mathbf{0}_n,\mathbf{0}_n),\ldots$$

于是, $\mu_{\mathcal{A}}=t^n$, F^n 是 $\mathcal{A}$-循环空间*(第二章第四讲定理 10.7)*.

设 $C\in F^{n\times m}$. 则

$$AC=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&0\\1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{C}_1\\\vec{C}_2\\\vec{C}_3\\\vdots\\\vec{C}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{1\times n}\\\vec{C}_1\\\vec{C}_2\\\vdots\\\vec{C}_{n-1}\end{pmatrix}.$$

令 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 F^n 的标准基. 则

$$\mathbf{e}_2=A\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3=A\mathbf{e}_2=A^2\mathbf{e}_1,\ldots.$$

于是, $\mathbf{e}_1$ 是一个 $\mathcal{A}$-循环向量. 由第二章第五讲引理 *12.8* 可知, F^n 是 $\mathcal{A}$-不可分的.

(ii) 根据 (1) 可知,

$$BA^2=(\vec{B}^{(3)},\vec{B}^{(4)},\ldots,\vec{B}^{(n)},\mathbf{0}_n,\mathbf{0}_n).$$

于是, 当 $n=2k$ 时, $\mu_{\mathcal{A}}=t^k$, 而当 $n=2k+1$ 时, $\mu_{\mathcal{A}}=t^{k+1}$. 根据第二章第四讲定理 *10.7*, F^n 不是 $\mathcal{A}^2$-循环的. 再根据第五讲引理 *12.8*, F^n 是 $\mathcal{A}^2$-可分的. □

注解 2.2 在上述例子中令 $n=2k$. 则 $\mathcal{A}$-不可分空间分解是

$$\begin{array}{ccccc}F^{2k} & = & (F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{e}_1) & \oplus & (F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{e}_2)\\ & & \shortparallel & & \shortparallel\\ & & \langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3,\ldots,\mathbf{e}_{2k-1}\rangle & & \langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_4,\ldots,\mathbf{e}_{2k}\rangle\end{array}.$$

例 2.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 且 V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 设 U 是 V 的 $\mathcal{A}$-子空间. 证明: U 是 $\mathcal{A}$-循环的.

证明. 我们首先来证明扩展的 *Bezout* 关系. 即设 $f_1,f_2,\ldots f_k\in F[t]$, $g=\gcd(f_1,\ldots,f_k)$. 则存在 $h_1,h_2,\ldots,h_k\in F[t]$ 使得

$$g=h_1f_1+\cdots+h_kf_k. \tag{2}$$

对 k 归纳. 当 $k=2$ 时, (2) 是通常的 *Bezout* 关系(见上学期第五章第一讲定理 *2.7*). 设 $k>2$ 且 $k-1$ 时 (2) 成立. 设 $p=\gcd(f_1,f_2,\ldots,f_{k-1})$. 由归纳假设可知, 存在 $q_1,q_2,\ldots,q_{k-1}$ 使得

$$p=q_1f_1+\cdots+q_{k-1}f_{k-1}. \tag{3}$$

因为 $g|f_i, i=1,2,\ldots,k-1,k$, 所以 $g|p$ 且 $g|f_k$. 于是, $g|\gcd(p,f_k)$. 类似地, $\gcd(p,f_k)|f_i$, $i=1,2,\ldots,k-1,k$. 我们有 $\gcd(p,f_k)|g$. 由此得出 $g=\gcd(p,f_k)$. 根据通常的 *Bezout* 关系, 存在 $a,b\in F[t]$ 使得 $ap+bf_k=g$. 用 (3) 的右侧替换 p 完成了归纳法.

设 $\mathbf{v}$ 是 V 的一个循环向量, U 的一组基是 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k$. 由第二章第四讲命题 *10.2 (i)*, 存在 $f_1(t),\ldots,f_k(t)\in F[t]$ 使得

$$\mathbf{u}_i=f_i(\mathcal{A})(\mathbf{v}),\quad i=1,2,\ldots,k.$$

设 $g=\gcd(f_1,\ldots,f_k)$. 则存在 $g_i(t)\in F[t]$ 满足 $f_i(t)=g_i(t)g(t)$. 于是 $\mathbf{u}_i=g_i(\mathcal{A})g(\mathcal{A})(\mathbf{v})$. 令 $\mathbf{w}=g(\mathcal{A})(\mathbf{v})$. 则 $\mathbf{u}_i=g_i(\mathcal{A})(\mathbf{w}), i=1,2,\ldots,k$. 我们有 $U\subset F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w}$. 根据 (2),

$$\begin{aligned}
&g(\mathcal{A})=h_1(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})+\cdots+h_k(\mathcal{A})f_k(\mathcal{A})\\
&\implies g(\mathcal{A})(\mathbf{v})=h_1(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})(\mathbf{v})+\cdots+h_k(\mathcal{A})f_k(\mathcal{A})(\mathbf{v})\\
&\implies \mathbf{w}=h_1(\mathcal{A})(\mathbf{u}_1)+\cdots+h_k(\mathcal{A})(\mathbf{u}_k).
\end{aligned}$$

因为 U 是 $\mathcal{A}$-不变的, 所以 $\mathbf{w}\in U$, 从而 $F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w}\subset U$. 我们得到 $U=F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w}$. □

例 2.4 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V), F=\mathbb{C}$. 证明 $\mathcal{A}$ 是一个对角算子和一个幂零算子之和.
证明. 设 $\operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_s\}$. 则存在 $m_1,\ldots,m_s\in\mathbb{Z}^+$ 使得

$$\mu_{\mathcal{A}}=(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_s)^{m_s}.$$

根据广义特征子空间分解,

$$V=K_1\oplus\cdots\oplus K_s,$$

其中 $K_i=\ker((t-\lambda_i)^{m_i})$, $i=1,2,\ldots,s$. 设 π_i 是 V 到 K_i 关于上述直和的投影. 令

$$\mathcal{B}=\lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_s\pi_s.$$

则对于任意 $\mathbf{x}_i\in K_i$,

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}_i)=\lambda_1\pi_1(\mathbf{x}_i)+\cdots+\lambda_s\pi_s(\mathbf{x}_i)=\lambda_i\mathbf{x}_i.$$

于是, $\mathbf{x}_i\in V_{\mathcal{B}}^{\lambda_i}$ (算子 $\mathcal{B}$ 关于 λ_i 的特征子空间). 由此得出 $K_i\subset V_{\mathcal{B}}^{\lambda_i}$. 由上述直和和第二章第三讲引理 *9.7* 可知,

$$V=V_{\mathcal{B}}^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\mathcal{B}}^{\lambda_s}.$$

由对角化判别法*II*, $\mathcal{B}$ 可对角化.

设 $\mathcal{C}=\mathcal{A}-\mathcal{B}$. 我们证明 $\mathcal{C}$ 是幂零的. 注意到 $\pi_1,\ldots,\pi_k$ 是完全正交等方组. 因为 $\mathcal{E}=\pi_1+\cdots+\pi_s$, 所以

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}\pi_1+\cdots+\mathcal{A}\pi_\ell.$$

于是

$$\mathcal{C}=(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\pi_1+\cdots+(\mathcal{A}-\lambda_s\mathcal{E})\pi_s.$$

对任意 $\mathbf{x}\in V$, 存在 $\mathbf{x}_1\in K_1,\ldots,\mathbf{x}_s\in K_s$ 使得

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\cdots+\mathbf{x}_s \Longrightarrow \mathcal{A}(\mathbf{x})=\mathcal{A}(\mathbf{x}_1)+\cdots+\mathcal{A}(\mathbf{x}_s).$$

因为 $K_1,\ldots,K_s$ 是 $\mathcal{A}$-不变的, 所以对任意 $i\in\{1,2,\ldots,s\}$,

$$\pi_i(\mathcal{A}(\mathbf{x}))=\mathcal{A}(\mathbf{x}_i)=\mathcal{A}(\pi_i(\mathbf{x})).$$

于是, π_i 与 $\mathcal{A}$ 交换. 从而, $\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{E}$ 与 π_i 交换, 其中 $i,j\in\{1,2,\ldots,s\}$. 类似第二章第四次习题课第三节最后的计算, 我们有

$$\mathcal{C}^k=(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})^k\pi_1+\cdots+(\mathcal{A}-\lambda_s\mathcal{E})^k\pi_s.$$

取 $k\geq\max(m_1,\ldots,m_s)$. 则

$$\mathcal{C}^k(\mathbf{x})=(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})^k\pi_1(\mathbf{x})+\cdots+(\mathcal{A}-\lambda_s\mathcal{E})^k\pi_s(\mathbf{x})=(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})^k(\mathbf{x}_1)+\cdots+(\mathcal{A}-\lambda_s\mathcal{E})^k(\mathbf{x}_s)=\mathbf{0}.$$

故 $\mathcal{C}$ 是幂零的. □

注解 2.5 由上述证明看出, $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ 关于算子的乘法是可交换的.

§3 关于 $\mathcal{AB}$ 和 $\mathcal{BA}$

习题 6. 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$. 证明:

(i) 如果 V^λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征子空间, 则 V^λ 是 $\mathcal{B}$-不变的;

(ii) 设 $F=\mathbb{C}$. 则 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 有公共的特征向量.

证明. (i) 设 $\mathbf{x}\in V^\lambda$. 则

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{x}))=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))=\mathcal{B}(\lambda\mathbf{x})=\lambda\mathcal{B}(\mathbf{x}).$$

于是, $\mathcal{B}(\mathbf{x})\in V^\lambda$. 即 V^λ 是 $\mathcal{B}$-不变的.

(i) 的另证. 注意到 $V^\lambda = \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. 由第二章第二讲引理 6.4, V^λ 是 $\mathcal{B}$-不变的.

(ii) 注意到 $\operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. 可设 $\lambda \in \operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$. 由 (i) 可知, $\mathcal{C} = \mathcal{B}|_{V^\lambda}$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 λ 的特征子空间上的线性算子. 因为 $\operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$, 所以存在 $\mathbf{v} \in V^\lambda$ 是 $\mathcal{C}$ 的特征向量. 于是, $\mathbf{v}$ 既是 $\mathcal{A}$ 的特征向量也是 $\mathcal{B}$ 的特征向量. □

例 3.1 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 满足 $AB = BA$. 证明*: 存在* $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得 $R^{-1}AR$ 和 $R^{-1}BR$ 都是上三角矩阵.

证明. 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 设 $n-1$ 时结论成立. 由上述习题可知, 存在 $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ 使得:

$$A\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} \quad \text{和} \quad B\mathbf{v} = \beta\mathbf{v},$$

其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. 设 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一组基, 且 $P = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$. 则 P 是可逆的. 我们计算:

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= P^{-1}(A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_n) \\
&= P^{-1}(\alpha\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_n) \\
&= (\alpha P^{-1}\vec{P}^{(1)}, P^{-1}A\mathbf{v}_2, \ldots, P^{-1}A\mathbf{v}_n) \\
&= (\alpha\mathbf{e}_1, P^{-1}A\mathbf{v}_2, \ldots, P^{-1}A\mathbf{v}_n) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha & * \\ O_{(n-1)\times 1} & A' \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

其中, $A' \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. 类似地,

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \beta & * \\ O_{(n-1)\times 1} & B' \end{pmatrix},$$

其中, $B' \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.

因为 $AB = BA$. 所以 $(P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP)$. 于是

$$\begin{pmatrix} \alpha & * \\ O_{(n-1)\times 1} & A' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & * \\ O_{(n-1)\times 1} & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & * \\ O_{(n-1)\times 1} & B' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & * \\ O_{(n-1)\times 1} & A' \end{pmatrix}.$$

由此得出, $A'B' = B'A'$. 根据归纳假设, 存在 $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ 使得 $Q^{-1}A'Q$ 和 $Q^{-1}B'Q$ 都是上三角形矩阵. 令

$$R = P\begin{pmatrix} 1 & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & Q \end{pmatrix}.$$

则 $R^{-1}AR$ 和 $R^{-1}BR$ 都是上三角形矩阵. □

例 3.2 设 $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 满足 $AB = BA$, 且 B 是幂零的. 证明: $\chi_A(t) = \chi_{A+B}(t)$.

证明. 由上例可知, 存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得 $S = P^{-1}AP$ 和 $T = P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵. 因为 B 幂零, 所以 T 幂零. 于是, T 的主对角线上的元素都等于零. 由此得到 $S+T$ 和 S 的主对角线上元素相同. 我们有 $\chi_S = \chi_{S+T}$. 注意到 $A \sim_s S$, $A + B \sim_s S + T$ ($\because$ $S = P^{-1}AP$ 和 $T = P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵). 于是, $\chi_A = \chi_{A+B}$. □

引理 3.3 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{C} = \mathcal{AB} - \mathcal{BA}$. 则或者 $\ker(\mathcal{A}) \subset \ker(C)$ 或者 $\mathrm{im}(\mathcal{C}) \cap \mathrm{im}(\mathcal{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$.

证明. 假设 $\ker(\mathcal{A}) \not\subseteq \ker(C)$. 则存在 $\mathbf{x} \in \ker(\mathcal{A})$ 使得 $\mathbf{y} = \mathcal{C}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$.

$$\mathbf{y} = \mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathcal{AB}(\mathbf{x}) - \mathcal{BA}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{x})) \implies \mathbf{y} \in \mathrm{im}(\mathcal{A}) \implies \mathbf{y} \in \mathrm{im}(\mathcal{C}) \cap \mathrm{im}(\mathcal{A}). \quad \square$$

例 3.4 设 $F = \mathbb{C}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathrm{rank}(\mathcal{AB} - \mathcal{BA}) \leq 1$. 证明: $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 有公共的特征向量.

证明. 设 $n = \dim(V)$ 和 $\mathcal{C} = \mathcal{AB} - \mathcal{BA}$. 如果 $\mathcal{A} = \mathcal{O}$, 则结论显然成立. 如果 $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = n$, 则我们可以用 $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ 来取代 $\mathcal{A}$, 其中 λ 是 $\mathcal{A}$ 的某个特征根. 而此时 $\mathrm{rank}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) < n$. 于是, 我们不妨假设 $0 < \mathrm{rank}(\mathcal{A}) < n$ 的情形. 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时显然成立. 设 $n > 1$ 且结论对维数小于 n 的空间都成立.

情形一: $\ker(\mathcal{A}) \subset \ker(C)$**.** 对任意 $\mathbf{x} \in \ker(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. 即

$$\mathcal{AB}(\mathbf{x}) - \mathcal{BA}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}.$$

于是, $\mathcal{B}(\mathbf{x}) \in \ker(\mathcal{A})$. 由此可知, $\ker(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{B}$-不变的. 注意到 $0 < \dim(\ker(\mathcal{A})) < n$. 设 $\mathcal{A}' = \mathcal{A}|_{\ker(\mathcal{A})}$ 和 $\mathcal{B}' = \mathcal{B}|_{\ker(\mathcal{A})}$. 则 $\mathrm{rank}(\mathcal{A}'\mathcal{B}' - \mathcal{B}'\mathcal{A}') \leq 1$. 由归纳假设, $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{B}'$ 有公共特征向量. 这个向量也是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的公共特征向量.

情形二: $\ker(\mathcal{A}) \not\subseteq \ker(C)$**.** 由引理 *3.3*, $\mathrm{im}(\mathcal{C}) \cap \mathrm{im}(\mathcal{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$. 于是, 存在非零向量 $\mathrm{im}(C) \cap \mathrm{im}(\mathcal{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$. 因为 $\dim(\mathrm{im}(\mathcal{C})) \leq 1$, 所以 $\mathrm{im}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{im}(\mathcal{A})$. 下面我们验证 $\mathrm{im}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{B}$-不变的. 设 $\mathbf{y} \in \mathrm{im}(\mathcal{A})$. 则存在 $\mathbf{x} \in V$ 使得 $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$. 我们计算

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = (\mathcal{AB} - \mathcal{BA})(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{x})) - \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{x})) - \mathcal{B}(\mathbf{y}).$$

于是, $\mathcal{B}(\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{x})) - \mathcal{C}(\mathbf{x}) \in \mathrm{im}(\mathcal{A}) + \mathrm{im}(\mathcal{C}) = \mathrm{im}(\mathcal{A})$. 验证完毕.

由此可知, $\mathrm{im}(\mathcal{A})$ 既是 $\mathcal{A}$-不变的, 又是 $\mathcal{B}$-不变的. 因为 $\ker(\mathcal{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$ 且 $\ker(\mathcal{A}) \neq V$, 所以 $0 < \dim(\mathrm{im}(\mathcal{A})) < n$.

设 $\mathcal{A}^- = \mathcal{A}|_{\mathrm{im}(\mathcal{A})}$ 和 $\mathcal{B}^- = \mathcal{B}|_{\mathrm{im}(\mathcal{A})}$. 则 $\mathrm{rank}(\mathcal{A}^-\mathcal{B}^- - \mathcal{B}^-\mathcal{A}^-) \leq 1$. 由归纳假设, $\mathcal{A}^-$ 和 $\mathcal{B}^-$ 有公共特征向量. 这个向量也是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的公共特征向量. □