第十四周习题课

符号约定. 如果不加特殊声明, V 是域 F 上的 n 维线性空间.

§1 关于习题

4. 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 上的求导算子, $\mathcal{A}=x\mathcal{D}$, $\mathcal{B}=\mathcal{D}^2$. 判断 $\mathbb{R}[x]_n$ 是不是 $\mathcal{A}$-循环空间, 是不是 $\mathcal{B}$-循环空间. 如果是, 求一个循环向量.

解. 注意到

$$(x\mathcal{D})(1,x,x^2,\dots x^{n-1})=(0,x,2x^2,\dots,(n-1)x^{n-1})$$
$$=(1,x,x^2,\dots x^{n-1})\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2&0\\0&0&0&\cdots&0&n-1\end{pmatrix}}_{A}.$$

因为 A 是对角矩阵 且对角线上的元素互不相同, 所以 $\mu_A=t(t-1)(t-2)\cdots(t-(n-1))$. 因为 $\deg(\mu_A)=n$, 所以 $\deg(\mu_{\mathcal{A}})=n$. 根据第二章第四讲定理 10.7, $\mathbb{R}[x]_n$ 是 $\mathcal{A}$-循环的. 它的一个循环向量是

$$1+x+\cdots+x^{n-1}.$$

(根据第二章第四讲例 10.8).

当 $n=2k$ 时, $\mathcal{B}^k=\mathcal{O}$. 故 $\deg(\mu_{\mathcal{B}})<n$. 由第二章第四讲定理 10.7 可知, $\mathbb{R}[x]_n$ 不是 $\mathcal{B}$-循环的. 当 $n=2k+1$ 时, $\mathcal{B}^{k+1}=\mathcal{O}$. 故当 $n>1$ 时, $\deg(\mu_{\mathcal{B}})<n$. 由第二章第四讲定理 10.7 可知, $\mathbb{R}[x]_n$ 不是 $\mathcal{B}$-循环的. 而当 $n=1$ 时, $\mathbb{R}$ 对任何算子都是循环的且循环向量可取任何非零实数. □

5. 设:

$$C=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

(i) 证明: C 可对角化.

(ii) 设 $f \in \mathbb{C}[t]$. 求 $\det(f(C))$.

解. (i) 计算 C 的特征多项式:

$$\chi_C(t) = \det \begin{pmatrix} t & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & t \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$= t\det \begin{pmatrix} t & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} - (-1)^{n+1}\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ t & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= t^n - 1.$$

因为 $\gcd(\chi_C, \chi_C') = 1$, 所以 C 在 $\mathbb{C}$ 中由 n 个互不相同的根. 于是, C 可对角化(第二章第四讲推论 9.8).

(ii) 记 n 次单位根是

$$\varepsilon_k = e^{\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

它们是 C 的 n 个单位根. 即 C 的 n 个特征根. (见第一学期第五章第三讲第三页). 根据 (i), 存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得

$$C = P^{-1}\mathrm{diag}\left(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\right) P.$$

则对任意 $m \in \mathbb{C}$,

$$C^m = P^{-1}\mathrm{diag}\left(\varepsilon_0^m, \varepsilon_1^m, \ldots, \varepsilon_{n-1}^m\right) P.$$

设 $f = \sum_{i=0}^d f_i t^i$. 则

$$f(C) = P^{-1}\mathrm{diag}\left(\sum_{i=0}^d f_i\varepsilon_0^i, \sum_{i=0}^d \varepsilon_1^i, \ldots, \sum_{i=0}^d f_i\varepsilon_{n-1}^i\right) P = P^{-1}\mathrm{diag}\left(f(\varepsilon_0), f(\varepsilon_1), \ldots, f(\varepsilon_{n-1})\right) P.$$

于是,

$$\det(f(C)) = f(\varepsilon_0)f(\varepsilon_1)\cdots f(\varepsilon_{n-1}). \quad \square$$

命题 1.1 设 C 如上题 和 $f = f_{n-1}t^{n-1} + f_{n-2}t^{n-2} + \cdots + f_1 t + f_0 \in F[t]$. 则

$$f(C) = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-2} & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_0 & f_1 & \cdots & f_{n-3} & f_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_2 & f_3 & f_4 & \cdots & f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_{n-1} & f_0 \end{pmatrix}.$$

证明. 我们先证明下面的公式. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 则

$$\forall\ k \in \{1,2,\dots,n-1\},\ AC^k = (\vec{A}^{(n-k+1)},\dots,\vec{A}^{(n-1)},\underset{\underset{k.}{\uparrow}}{\vec{A}^{(n)}},\vec{A}^{(1)},\vec{A}^{(2)},\dots,\vec{A}^{(n-k)}). \quad (1)$$

当 $k=1$ 时, (1) 可直接计算验证. 设 $k-1$ 时 (1) 成立. 则

$$\begin{aligned} AC^k &= (\vec{A}^{(n-k+2)},\dots,\vec{A}^{(n-1)},\vec{A}^{(n)},\vec{A}^{(1)},\vec{A}^{(2)},\dots,\vec{A}^{(n-k+1)})C \\ &= (\vec{A}^{(n-k+1)},\dots,\vec{A}^{(n-1)},\vec{A}^{(n)},\vec{A}^{(1)},\vec{A}^{(2)},\dots,\vec{A}^{(n-k)}). \end{aligned}$$

(1) 成立.

取 $A=E$. 则 (1) 变成 $C^k = (\mathbf{e}_{n-k+1},\dots,\mathbf{e}_{n-1},\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_{n-k})$, $k{=}1,2,\dots,n{-}1$. 在加上 $C^0=(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$. 由 $f(C)=f_{n-1}C^{n-1}+f_{n-2}C^{n-2}+\cdots+f_1C+f_0C^0$ 得出 $f(C)$ 的行列式公式. □

有上述例子和命题得到了循环矩阵的行列式公式(见第一学期第五章第三讲第三页的例子).

6. 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 满足 $A^k=A$, 其中 $k>1$. 证明:

(i) A 可对角化;

(ii) 当 $k=2$ 时, $A \sim_s \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 且 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{rank}(A)$.

证明. (i) 设 $f(t)=t^k-t$. 则 $f(A)=O$. 于是 $\mu_A|f$. 因为 $f(t)$ 是无平方的, 即 $\gcd(f,f')=1$, 所以 μ_A 在 $\mathbb{C}$ 中的根都是一重的. 由对角化判别法V, A 可对角化.

(ii) 此时 $\mu_A|(t^2-t)$. 矩阵 A 的特征值只可能是 1 和 0 (Hamilton-Cayley 定理之加强版(第二章第五讲定理 12.3)). 设 A 关于 1 的重数是 r. 根据 (i),

$$A \sim_s \underbrace{\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}}_{B}.$$

因为秩和迹都是相似不变量, $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B), \mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$. 由此得到

$$\mathrm{rank}(A)=r=\mathrm{tr}(A). \quad \square$$

§2 低阶矩阵 Jordan 标准型的计算

例 2.1 确定 $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ 中所有的 *Jordan* 标准型.

解. 设 $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$, $\chi_A = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$.
情形 1: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 两个不同. 此时 A 可对角化*(第二章第四讲推论 9.8)*. 于是,

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & \\ & J_1(\lambda_2) & \\ & & J_1(\lambda_3) \end{pmatrix}.$$

情形 2: $\chi_A = (t-\lambda_1)^2(t-\lambda_2)$. 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 如果 $\mu_A = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$, 则 A 可对角化*(对角化判别法 V)*. 于是,

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & \\ & J_1(\lambda_1) & \\ & & J_1(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A = (t-\lambda_1)^2(t-\lambda_2)$, 则 A 不可对角化*(对角化判别法 V)*. 于是,

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2(\lambda_1) & \\ & J_1(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

情形 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 =: \lambda$. 如果 $\mu_A = t - \lambda$, 则 A 可对角化*(对角化判别法 V)*. 于是,

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & & \\ & J_1(\lambda) & \\ & & J_1(\lambda) \end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A = (t-\lambda)^2$, 则 J_A 中关于 λ 的 *Jordan* 块的最大阶数等于 *2*. 于是

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2(\lambda) & \\ & J_1(\lambda) \end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A = (t-\lambda)^3$, 则 J_A 中关于 λ 的 *Jordan* 块的最大阶数等于 *3*. 于是

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = J_3(\lambda). \quad \square$$

注解 2.2 上述两个例子说明*:* 当 A, B 是两个三阶复矩阵时, $A \sim_s B$ 当且仅当 $\chi_A = \chi_B$ 和 $\mu_A = \mu_B$.

例 2.3 设 *4* 阶复矩阵

$$A=\begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0) \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_1(0) \end{pmatrix}.$$

则 $\chi_A=\chi_B$ 且 $\mu_A=\mu_B$. 但 $\operatorname{rank}(A)\neq\operatorname{rank}(B)$. 故 $A\nsim_s B$. □

§3 关于书上的习题

例 3.1 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 证明*:* 如果 $\operatorname{tr}(A^k)=0$, $k=1,2,\ldots,n$, 则 A 是幂零的.

证明. 设 $\chi_A=t^{n_0}(t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_s)^{n_s}$, 其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_s\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 两两不同, $n_0,n_1,\ldots,n_s\in\mathbb{N}$. 由第二章第三讲例 *8.12*, 存在可逆复矩阵 P 和上三角复矩阵 B 使得

$$B=P^{-1}AP.$$

因为 $\chi_{=}\chi_B$ 且 B 是上三角的, 所以 B 的对角线由 n_0 个 0, n_1 个 λ_1, $\ldots$, n_s 和 λ_s 组成. 于是, $B^k=P^{-1}A^kP$ 是上三角的且 B^k 的对角线由 n_0 个 0, n_1 个 λ_1^k, $\ldots$, n_s 和 λ_s^k 组成. 因为 $\operatorname{tr}(B^k)=\operatorname{tr}(A^k)$*(*第二章第一讲命题 *2.5)*, 所以 $\operatorname{tr}(B^k)=0$. 由此和 $\lambda_0=0$ 得出

$$\sum_{i=1}^{s}n_i\lambda_i^k=0,\quad k=1,2,\ldots,s.$$

即

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\cdots \\ \lambda_1^s & \lambda_2^s & \cdots & \lambda_s^s \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因为

$$\det(C)=(\lambda_1\cdots\lambda_s)\det\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\cdots \\ \lambda_1^{s-1} & \lambda_2^{s-1} & \cdots & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix}}_{D}$$

且 $\det(D)\neq 0$. 于是, $\det(C)\neq 0$. 由此得出 $n_1=\cdots=n_s=0$. 即 $\chi_A(t)=t^{n_0}=t^n$. 根据 *Hamilton-Cayley* 定理, A 是幂零的. □

例 3.2 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 证明: 如果 $AB - BA = B$, 则 B 是幂零的.

证明. 由第二章第六讲推论 *13.5* 可知, 存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得 $B = P^{-1}J_BP$. 于是,

$$A(P^{-1}J_BP) - (P^{-1}J_BP)A = P^{-1}J_BP.$$

化简得

$$(PAP^{-1})J_B - J_B(PAP^{-1}) = J_B.$$

令 $C = PAP^{-1}$. 我们有

$$CJ_B - J_BC = J_B. \tag{2}$$

令

$$J_B = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{d_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}.$$

于是, (3) 蕴含

$$C_iJ_{d_i}(\lambda_i) - J_{d_i}(\lambda_i)C_i = J_{d_i}(\lambda_i), \tag{3}$$

其中 C_i 是由 C 中 第 $d_0 + \cdots + d_{i-1} + 1, d_0 + \cdots + d_{i-1} + 2, \ldots, d_0 + \cdots + d_{i-1} + d_i$ 行和列组成的子矩阵, $i = 1, 2, \ldots k$ 且 $d_0 = 0$. 由此可知，我们只要证明:

$$AJ_n(\lambda) - J_n(\lambda)A = J_n(\lambda) \implies \lambda = 0.$$

由左侧的等式得出:

$$\begin{aligned} & A(\lambda E_n + J_n(0)) - (\lambda E_n + J_n(0))A = (\lambda E_n + J_n(0)) \\ & \implies AJ_n(0) - J_n(0)A = (\lambda E_n + J_n(0)) \\ & \implies (\mathbf{0}, \vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n-1)}) - \begin{pmatrix} \vec{A}_2 \\ \vdots \\ \vec{A}_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = (\lambda E_n + J_n(0)). \end{aligned}$$

对最后一个等式两边作用 tr 得 *(*$A = (a_{i,j})_{n\times n}$*):*

$$(0+a_{2,1}+a_{3,2}+\cdots+a_{n,n-1})-(a_{2,1}+a_{3,2}+\cdots+a_{n,n-1}+0) = n\lambda \implies 0 = n\lambda \implies \lambda = 0. \quad \square$$

§4 算子加法分解的唯一性

命题 4.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 其中 $F = \mathbb{C}$. 证明存在唯一的 $\mathcal{S}, \mathcal{N} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A} = \mathcal{S} + \mathcal{N}$, $\mathcal{S}$ 可对角化, $\mathcal{N}$ 幂零 和 $\mathcal{S}\mathcal{N} = \mathcal{N}\mathcal{S}$.

证明. 存在性见第二章第五次习题课例 2.4. 下面我们来考虑唯一性.

再设 $\mathcal{S}', \mathcal{N}' \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A} = \mathcal{S}' + \mathcal{N}'$, $\mathcal{S}'$ 可对角化, $\mathcal{N}'$ 幂零 和 $\mathcal{S}'\mathcal{N}' = \mathcal{N}'\mathcal{S}'$. 我们只要证明 $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ 即可. 令 $\chi_{\mathcal{A}} = (t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_s)^{n_s}$ 是 $\chi_{\mathcal{A}}$ 在 $\mathbb{C}[t]$ 中的不可约因式分解. 由广义特征子空间分解之特征多项式版(第二章第五讲定理 12.7),

$$V = K_1 \oplus \cdots \oplus K_s,$$

其中 $K_i = \ker((\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})^{n_i})$. 因为 $\mathcal{S}\mathcal{N} = \mathcal{N}\mathcal{S}$, 所以 $\mathcal{S}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{N}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{N}$. 根据第二章第二讲命题 6.5, K_i 是 $\mathcal{S}$-不变的和 $\mathcal{N}$-不变的. 令 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{K_i}$, $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}|_{K_i}$ 和 $\mathcal{N}_i = \mathcal{A}|_{K_i}$. 则 $\mathcal{A}_i = \mathcal{S}_i + \mathcal{N}_i$. 由可对角化判别法V, $\mathcal{S}_i$ 是可对角化的($\mu_{\mathcal{S}_i}|\mu_{\mathcal{S}}$ 蕴含 $\mu_{\mathcal{S}_i}$ 是无平方的). 而 $\mathcal{N}_i$ 显然是幂零的. 根据第二章第五次习题课例 3.2, $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_i) = \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}_i)$. 而后者等于 $\{\lambda_i\}$. (见广义特征子空间分解之特征多项式版(第二章第五讲定理 12.7 (ii))). 于是, $\mathcal{S}_i = \lambda_i\mathcal{E}$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

令 $\mathcal{S}_i' = \mathcal{S}'|_{K_i}$. 类似地, $\mathcal{S}_i' = \lambda_i\mathcal{E}$, $i = 1, 2, \ldots, s$. 于是 $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_i'$, $i = 1, 2, \ldots, s$. 设 $\mathbf{x} \in V$. 则存在 $\mathbf{x}_1 \in K_1, \ldots, \mathbf{x}_s \in K_s$ 使得

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_s.$$

于是,

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}) = \mathcal{S}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \mathcal{S}(\mathbf{x}_s) = \mathcal{S}_1(\mathbf{x}_1) + \cdots + \mathcal{S}_s(\mathbf{x}_s).$$

$$\mathcal{S}'(\mathbf{x}) = \mathcal{S}'(\mathbf{x}_1) + \cdots + \mathcal{S}'(\mathbf{x}_s) = \mathcal{S}_1'(\mathbf{x}_1) + \cdots + \mathcal{S}_s'(\mathbf{x}_s).$$

因为 $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_i'$, $i = 1, 2, \ldots, s$, 所以 $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$. □