第十五周习题课

符号约定. 如果不加特殊声明, V 是域 F 上的 n 维线性空间.

§1 关于习题

5. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\ell\in\mathbb{N}$ 使得 $\ker(\mathcal{A}^{\ell})=\ker(\mathcal{A}^{\ell+1})$. 证明: 对于任意 $i\in\mathbb{Z}^{+}$,

$$\ker(\mathcal{A}^{\ell})=\ker(\mathcal{A}^{\ell+i}).$$

证明. 只要证明 $\ker(\mathcal{A}^{\ell+1})=\ker(\mathcal{A}^{\ell+2})$ 即可. 设 $\mathbf{x}\in\ker(\mathcal{A}^{\ell+1})$. 则 $\mathcal{A}^{\ell+1}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$. 于是,

$$\mathcal{A}^{\ell+2}(\mathbf{x})=\mathcal{A}(\mathcal{A}^{\ell+1}(\mathbf{x}))=\mathcal{A}(\mathbf{0})=\mathbf{0}.$$

故 $\mathbf{x}\in\ker(\mathcal{A}^{\ell+2})$. 由此得出

$$\ker(\mathcal{A}^{\ell+1})\subset\ker(\mathcal{A}^{\ell+2}).$$

反之, 设 $\mathbf{x}\in\ker(\mathcal{A}^{\ell+2})$. 则 $\mathcal{A}^{\ell+2}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$. 于是, $\mathcal{A}^{\ell+1}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))=\mathbf{0}$. 即 $\mathcal{A}(\mathbf{x})\in\ker(\mathcal{A}^{\ell+1})$. 因为 $\ker(\mathcal{A}^{\ell})=\ker(\mathcal{A}^{\ell+1})$, 所以 $\mathcal{A}(\mathbf{x})\in\ker(\mathcal{A}^{\ell})$, 即 $\mathcal{A}^{\ell+1}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$. 即 $\mathbf{x}\in\ker(\mathcal{A}^{\ell+1})$. 从而

$$\ker(\mathcal{A}^{\ell+2})\subset\ker(\mathcal{A}^{\ell+1}).\quad\square$$

注解 1.1 类似地, 我们有

$$\operatorname{im}(\mathcal{A}^{\ell})=\operatorname{im}(\mathcal{A}^{\ell+1})\implies\operatorname{im}(\mathcal{A}^{\ell+1})=\operatorname{im}(\mathcal{A}^{\ell+2}).$$

证明. 设 $\mathbf{x}\in\operatorname{im}(\mathcal{A}^{\ell+2})$. 则存在 $\mathbf{y}\in V$ 使得 $\mathbf{x}=\mathcal{A}^{\ell+2}(\mathbf{y})=\mathcal{A}^{\ell+1}(\mathcal{A}(\mathbf{y}))\in\operatorname{im}(\mathcal{A}^{\ell+1})$. 于是, $\operatorname{im}(\mathcal{A}^{\ell+2})\subset\operatorname{im}(\mathcal{A}^{\ell+1})$.

反之, 设 $\mathbf{x}\in\operatorname{im}(\mathcal{A}^{\ell+1})$. 则存在 $\mathbf{y}\in V$ 使得

$$\mathbf{x}=\mathcal{A}^{\ell+1}(\mathbf{y})=\mathcal{A}(\underbrace{\mathcal{A}^{\ell}(\mathbf{y})}_{\mathbf{z}}).$$

因为 $\mathbf{z}\in\operatorname{im}(\mathcal{A}^{\ell})$ 和 $\operatorname{im}(\mathcal{A}^{\ell})=\operatorname{im}(\mathcal{A}^{\ell+1})$, 所以存在 $\mathbf{w}\in V$ 使得 $\mathbf{z}=\mathcal{A}^{\ell+1}(\mathbf{w})$. 于是, $\mathbf{x}=\mathcal{A}^{\ell+2}(\mathbf{w})$. 故 $\mathbf{x}\in\operatorname{im}(\mathcal{A}^{\ell+2})$. 我们得到 $\operatorname{im}(\mathcal{A}^{\ell+1})\subset\operatorname{im}(\mathcal{A}^{\ell+2})$. $\square$

§2　Jordan 标准型的计算

例 2.1 设 n 是偶数. 计算

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

的 *Jordan* 标准型.

解. 直接计算 $A^2=2A$. 因为 A 不是数乘矩阵, 所以 $\mu_A=t^2-2t=t(t-2)$. 于是, A 可对角化(*可对角化判别法V*)且 A 两个特征根 $\lambda_1=0$ 和 $\lambda_2=2$. 我们只要判定 J_A 的主对角线上有多少 λ_1 和 λ_2 即可. 设 $n=2k$. 直接计算得 $R(\lambda_1,0)=2k$, $R(\lambda_1,1)=k$. 因为 $A^2=2A$, 所以 $R(\lambda_1,2)=k$. 于是,

$$N(\lambda_1,1)=2k+k-2k=k.$$

由此得出 $N(\lambda_2,1)=k$. 故

$$J_A=\begin{pmatrix}O_{k\times k} & \\ & 2E_k\end{pmatrix}.\quad\square$$

例 2.2 设 n 是偶数. 计算 $J_n(0)^2$ 的 *Jordan* 标准型.

解. 设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的标准基. 则 $J_n(0)=(0,\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n-1})$. 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 则

$$AJ_n(0)=(\vec{A}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(n)})(\mathbf{0},\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n-1})=(\mathbf{0},\vec{A}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(n-1)}).$$

于是,

$$B:=J_n(0)^2=(\mathbf{0},\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n-1})(\mathbf{0},\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n-1})=(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n-2}).$$

由此可知

$$AB=(\mathbf{0},\mathbf{0},\vec{A}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(n-2)}).$$

设 $n=2k$. 我们有

$$B^k=O\quad 但\quad B^{k-1}\neq O.$$

故 $\mu_B=t^k$. 直接计算得

$$n_k=r_{k-1}+r_{k+1}-2r_k=2+0-0=2.$$

根据第二章第七讲定理 *14.9*,

$$J_B=\begin{pmatrix}J_k(0) & \\ & J_k(0)\end{pmatrix}.$$

例 2.3 计算 $J_n(\lambda)^k$ 的 *Jordan* 标准型, 其中 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k > 0$.

解. 注意到 λE 在 $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 的中心. 直接计算得

$$J_n(\lambda)^k = (\lambda E + J_n(0))^k = \lambda^k E + k\lambda^{k-1} J_n(0) + \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} J_n(0)^i.$$

于是,

$$J_n(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & * & \cdots & * & * \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

设 $A = J_n(\lambda)^k$. 则 $\chi_A = (t - \lambda^k)^n$. 因为

$$\mathrm{rank}(A - \lambda^k E) = \mathrm{rank} \begin{pmatrix} 0 & k\lambda^{k-1} & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & k\lambda^{k-1} & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = n - 1.$$

所以 λ^k 的几何重数等于 *1*. 由此得出, J_A 只有一个 *Jordan* 块. 即 $J_A = J_n(\lambda^k)$. □

§3 可逆矩阵的 Jordan 标准型

引理 3.1 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 且 $\chi_{\mathcal{A}} = (t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_s)^{n_s}$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{C}$, 两两不同. 设 $f \in \mathbb{C}[t]$. 则

$$\chi_{f(\mathcal{A})} = (t - f(\lambda_1))^{n_1} \cdots (f - f(\lambda_s))^{n_s}.$$

证明. 根据第二章第三讲例 8.12 或复矩阵的 Jordan 标准型, 存在可逆矩阵 P 和上三角矩阵 T 使得

$$A = P^{-1} T P.$$

设 T 的对角线是 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. 则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$, 且 λ_i 在序列 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 中出现的重数是 n_i, $i = 1, 2, \ldots, s$.

由矩阵乘法运算可得对任意 $k \in \mathbb{N}$, T^k 的对角线是 $\alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k$. 设

$$f = f_d t^d + f_{d-1} t^{d-1} + \cdots f_0.$$

则

$$f(A)=P^{-1}f(T)P=P^{-1}\left(\sum_{i=0}^{d}f_iT^i\right)P=P^{-1}\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{d}f_i\alpha_1^i & * & \cdots & * \\ & \sum_{i=0}^{d}f_i\alpha_2^i & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sum_{i=0}^{d}f_i\alpha_n^i\end{pmatrix}P.$$

故 $f(A)$ 的对角线是 $f(\alpha_1),f(\alpha_2),\ldots,f(\alpha_n)$. 根据第二章第七讲引理 15.1, $f(A)\sim_s f(T)$, 于是 $\chi_{f(A)}=\chi_{f(T)}$. 由此得出,

$$\chi_{f(A)}=(t-f(\alpha_1))\cdots(t-f(\alpha_n))=(t-f(\lambda_1))^{n_1}\cdots(f-f(\lambda_s))^{n_s}.\quad\square$$

例 3.2 设 $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. 证明 $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)=\{1\}$ 当且仅当对任意的 $k\in\mathbb{Z}^+$, $A\sim_s A^k$.
证明. 设 $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)=\{1\}$, 且

$$J_A=\begin{pmatrix}J_{d_1}(1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_\ell}(1)\end{pmatrix}.$$

则

$$A^k\sim_s\begin{pmatrix}J_{d_1}(1)^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_\ell}(1)^k.\end{pmatrix}.$$

(见第二章第七讲引理 15.1). 根据例 *2.3*, 对任意 $i\in\{1,2,\ldots,\ell\}$, $J_{d_i}(1)^k\sim_s J_{d_i}(1)$. 于是, $A^k\sim_s J_A\sim_s A$. 故 $A^k\sim_s A$.

反之, 设 $A\sim_s A^k$, $k\in\mathbb{Z}^+$. 设 $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_s\}$. 由上述引理可知,

$$\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A^k)=\{\lambda_1^k,\ldots,\lambda_s^k\}=\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A).$$

注意到 $\lambda_1^k\in\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)$, $k=1,2,\ldots$. 于是, 存在 $i,j\in\mathbb{Z}^+$ 满足 $i<j$ 且 $\lambda_1^i=\lambda_1^j$. 故 $\lambda_1^{i-j}=1$. 由此可知对任意 $\ell\in\{1,2,\ldots,s\}$, 存在 $m_\ell\in\mathbb{Z}$ 使得 $\lambda_\ell^{m_\ell}=1$. 令

$$m=\mathrm{lcm}(m_1,\ldots,m_s).$$

则 $\lambda_\ell^m=1$, $\ell=1,2,\ldots,s$. 从而 $\mathrm{spec}_F(A^m)=\{1\}$. 故 $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)=\{1\}$. $\square$

例 3.3 设 $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. 证明对任意的 $k\in\mathbb{Z}^+$, 存在 $X\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得 $X^k=A$.

证明. 先证明存在 $Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得 $Y^k = J_n(\lambda)$, 其中 $\lambda \neq 0$. 注意到

$$J_n(\lambda) = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1} & & & \\ & 1 & \lambda^{-1} & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \lambda^{-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{B}.$$

由例 *2.3* 可知, $B \sim_s B^k$. 故存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得 $B = P^{-1}B^kP$. 设 $C = P^{-1}BP$. 则 $C^k = B$. 令 $Y = \lambda^{\frac{1}{n}}C$. 则 $Y^k = \lambda B = J_n(\lambda)$.

再证明存在 $Z \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得 $Z^k = J_A$. 设

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_\ell}(\lambda_\ell) \end{pmatrix}.$$

因为 A 可逆, 所以 $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ 都不等于零. 于是存在 $Y_i \in \mathrm{GL}_{d_i}(\mathbb{C})$ 使得 $Y_i^k = J_{d_i}(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, \ell$. 令

$$Z = \begin{pmatrix} Y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Y_k \end{pmatrix}.$$

即可. 设 $A = P^{-1}J_AP$, 其中 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. 令 $X = P^{-1}ZP$. 则

$$X^k = P^{-1}Z^kP = P^{-1}J_AP = A. \quad \square$$

§4 Jordan-Chevalley 分解

定理 4.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 其中 $F = \mathbb{C}$. 则存在唯一的 $\mathcal{S}, \mathcal{N} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A} = \mathcal{S} + \mathcal{N}$, $\mathcal{S}$ 可对角化, $\mathcal{N}$ 幂零 和 $\mathcal{S}\mathcal{N} = \mathcal{N}\mathcal{S}$. 进而, $\mathcal{S}, \mathcal{N} \in \mathbb{C}[\mathcal{A}]$.

证明. 可对角化算子 $\mathcal{S}$ 和幂零算子 $\mathcal{N}$ 的存在唯一性已经证明(存在性见第二章第五次习题课例 2.4, 唯一性见第二章第六次上习题课命题4.1). 下面证明 $\mathcal{S}, \mathcal{N} \in \mathbb{C}[\mathcal{A}]$. 只要证明 $\mathcal{S} \in \mathbb{C}[\mathcal{A}]$ 即可.

设 $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$. 则存在 $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}^+$ 使得

$$\mu_{\mathcal{A}} = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}.$$

根据广义特征子空间分解,

$$V = K_1 \oplus \cdots \oplus K_s,$$

其中 $K_i = \ker((t-\lambda_i)^{m_i})$, $i = 1, 2, \ldots, s$. 设 π_i 是 V 到 K_i 关于上述直和的投影. 根据第二章第五次习题课例 2.4

$$\mathcal{N} = \lambda_1 \pi_1 + \cdots + \lambda_s \pi_s.$$

于是, 我们只需证明 $\pi_1, \ldots, \pi_s \in \mathbb{C}[\mathcal{A}]$. 不妨证明 $\pi_1 \in \mathbb{C}[\mathcal{A}]$. 考虑同余方程组

$$\begin{cases} f(t) \equiv 1 \mod (t-\lambda_1)^{m_1} \\ f(t) \equiv 0 \mod (t-\lambda_2)^{m_2} \\ \qquad\qquad \vdots \\ f(t) \equiv 0 \mod (t-\lambda_s)^{m_s} \end{cases}$$

根据多项式版的中国剩余定理(第零章讲义定理 6.6), 存在 $f \in F[t]$ 满足上述方程组. 下面验证: $\pi_1 = f(\mathcal{A})$. 设 $\mathbf{x} \in V$. 则 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_s$, 其中 $\mathbf{x}_1 \in K_1, \ldots, \mathbf{x}_s \in K_s$. 因为

$$f(t) \equiv 1 \mod (t-\lambda_1)^{m_1},$$

所以存在 $h_1 \in F[x]$ 使得 $f(t) = h_1(t)(t-\lambda_1)^{m_1} + 1$. 于是

$$f(\mathcal{A}) = h_1(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})^{m_1} + \mathcal{E}.$$

由此得出

$$f(\mathcal{A})(\mathbf{x}_1) = h_1(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})^{m_1}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{E}(\mathbf{x}_1) \overset{\mathbf{x}_1 \in K_1}{=} \mathcal{E}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1. \tag{1}$$

因为对任意 $i \in \{2, \ldots, s\}$,

$$f(t) \equiv 0 \mod (t-\lambda_i)^{m_i},$$

所以存在 $h_i \in F[x]$ 使得 $f(t) = h_i(t)(t-\lambda_i)^{m_i}$. 于是

$$f(\mathcal{A}) = h_i(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{m_i}.$$

由此得出

$$f(\mathcal{A})(\mathbf{x}_i) = h_i(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{m_i}(\mathbf{x}_i) \overset{\mathbf{x}_i \in K_i}{=} \mathbf{0}. \tag{2}$$

于是,

$$f(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = f(\mathcal{A})(\mathbf{x}_1) + f(\mathcal{A})(\mathbf{x}_2) + \cdots + f(\mathcal{A})(\mathbf{x}_s) \overset{(1),(2)}{=} \mathbf{x}_1 = \pi_1(\mathbf{x}).$$

验证完毕. 我们得到 $\pi_1 \in \mathbb{C}[\mathcal{A}]$. 类似地可得 $\pi_i \in \mathbb{C}[\mathcal{A}]$, $i = 2, 3, \ldots, s$. $\square$