第十六周习题课

§1　关于习题

3. 计算 $J_n(\lambda)^k$, 其中 $J_n(\lambda)$ 是关于 λ 的 n 阶 Jordan 块, $k\in\mathbb{N}$.

解. 直接计算得

$$\begin{aligned} J_n(\lambda)^k &= (\lambda E + J_n(0))^k \\ &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(\lambda E)^{k-i}J_n(0)^i \qquad\qquad (\text{因为 } \lambda E \text{ 在 } \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \text{ 的中心}) \\ &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^{k-i}J_n(0)^i. \end{aligned}$$

注意到

$$J_n(0)^i = \begin{cases} (\underbrace{\mathbf{0},\dots,\mathbf{0}}_{i},\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{n-i}), & 0\le i\le n-1 \\ O_{n\times n} & i\ge n. \end{cases}$$

于是,

$$\begin{aligned} J_n(\lambda)^k &= \sum_{i=0}^{\min(k,n-1)}\binom{k}{i}\lambda^{k-i}(\underbrace{\mathbf{0},\dots,\mathbf{0}}_{i},\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{n-i}) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \cdots & \binom{k}{n-2}\lambda^{k-n+2} & \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \cdots & \binom{k}{n-3}\lambda^{k-n+3} & \binom{k}{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \cdots & \binom{k}{n-4}\lambda^{k-n+4} & \binom{k}{n-3}\lambda^{k-n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $\binom{a}{b}=0$, $a<b$.

　　设 $p_k(x)=x^k$. 则

$$J_n(\lambda)^k = \begin{pmatrix} p_k(\lambda) & \frac{p_k(\lambda)'}{1!} & \frac{p_k(\lambda)''}{2!} & \cdots & \frac{p_k(\lambda)^{(n-2)}}{(n-2)!} & \frac{p_k(\lambda)^{(n-1)}}{(n-1)!} \\ 0 & p_k(\lambda) & \frac{p_k(\lambda)'}{1!} & \cdots & \frac{p_k(\lambda)^{(n-3)}}{(n-3)!} & \frac{p_k(\lambda)^{(n-2)}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & p_k(\lambda) & \cdots & \frac{p_k(\lambda)^{(n-4)}}{(n-4)!} & \frac{p_k(\lambda)^{(n-3)}}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_k(\lambda) & \frac{p_k(\lambda)'}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_k(\lambda) \end{pmatrix}.$$

这是因为当

$$\binom{k}{i} = \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!}, \quad k \geq i; \qquad \binom{k}{i} = 0, \quad k < i.$$

由此可以得出普遍的公式: 对任意 $p \in F[t]$,

$$p(J_n(\lambda)) = \begin{pmatrix} p(\lambda) & \frac{p(\lambda)'}{1!} & \frac{p(\lambda)''}{2!} & \cdots & \frac{p(\lambda)^{(n-2)}}{(n-2)!} & \frac{p(\lambda)^{(n-1)}}{(n-1)!} \\ 0 & p(\lambda) & \frac{p(\lambda)'}{1!} & \cdots & \frac{p(\lambda)^{(n-3)}}{(n-3)!} & \frac{p(\lambda)^{(n-2)}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & p(\lambda) & \cdots & \frac{p(\lambda)^{(n-4)}}{(n-4)!} & \frac{p(\lambda)^{(n-3)}}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p(\lambda) & \frac{p(\lambda)'}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p(\lambda) \end{pmatrix}. \quad \square$$

5. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 设 $\lambda \in \operatorname{spec}_F(\mathcal{A})$. 证明: $\dim(V^\lambda) = 1$.
证明. 特征子空间 V^λ 是 $\mathcal{A}$-不变的(见第二章第三讲第四页). 根据假设 V 是 $\mathcal{A}$-循环的和第二章第五次习题课例 2.3, V^λ 是 $\mathcal{A}$-循环的. 于是, 存在 $\mathbf{w} \in V^\lambda$ 使得 $V^\lambda = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$. 因为 $\mathcal{A}(\mathbf{w}) = \lambda \mathbf{w}$, 所以 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}} = t - \lambda$. 由此得出 $\dim(F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}) = 1$ (第二章第四讲命题 10.2 (iii)). 故 $\dim(V^\lambda) = 1$. $\square$

注解 1.1 第二章第五次习题课例 *2.3* 的另一个证明.
设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, V 是 $\mathcal{A}$-循环的, U 是 $\mathcal{A}$-不变的. 证明: U 是 $\mathcal{A}$-循环的.
证明. 设 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$. 不妨设 $U \neq \{\mathbf{0}\}$. 设 $S = \{f \in F[t] | f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) \in U\}$. 由第二章第四讲命题 *10.2 (i)* 可知, $S \neq \{0\}$. 设 g 是 S 中非零次数最小的多项式. 令 $\mathbf{w} = g(\mathcal{A})(\mathbf{v})$. 我们来验证 $U = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$.

由 $\mathbf{w}$ 的定义可知, $\mathbf{w} \in U$. 因为 U 是 A-不变的, 所以 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w} \subset U$. 反之, 设 $\mathbf{u} \in U$. 则存在 $f \in S$ 使得 $\mathbf{u} = f(\mathcal{A})(\mathbf{v})$. 由多项式除法存在 $q, r \in F[t]$ 使得

$$f(t) = q(t)g(t) + r(t) \quad 且 \quad \deg(r) < \deg(g).$$

把上式作用在 $\mathbf{v}$ 上得:

$$f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = q(\mathcal{A})g(\mathcal{A})(\mathbf{v}) + r(\mathcal{A})(\mathbf{v}).$$

于是, $r(\mathcal{A})(\mathbf{v}) \in U$. 根据 $g(t)$ 的定义, $r(t) = 0$. 由此得出,

$$\mathbf{u} = f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = q(\mathcal{A})g(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = q(\mathcal{A})(\mathbf{w}) \in F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}.$$

验证完毕. $\square$

§2 长度与角度

例 2.1 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧式空间. 设

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

计算 $\|\mathbf{v}_1\|, \|\mathbf{v}_2\|$ 和这两个向量的夹角.

解. 直接计算得

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{15}$$

和

$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{30}.$$

两向量之间得夹角等于

$$\arccos\left(\frac{(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_2\|}\right) = \arccos\left(\frac{-5}{15\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{6}\right).$$

例 2.2 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ 的夹角是 θ. 证明:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos(\theta).$$

证明. 直接计算

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x} - \mathbf{y}|\mathbf{y} - \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{x}|\mathbf{x}) - 2(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + (\mathbf{y}|\mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\frac{(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos(\theta). \quad \square \end{aligned}$$

例 2.3 设 $n \in \mathbb{Z}^+$. 在 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 中定义: 对任意 $f, g \in \mathbb{R}[x]_{n+1}$,

$$(f|g) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right).$$

证明 $(\,|\,)$ 是 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 上的内积并计算 $\|x\|$.

解. 可直接验证 $(\,|\,)$ 是对称双线性型. 因为

$$(f|f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)^2 \geq 0,$$

所以 $(f|f)$ 是半正定的. 如果 $(f|f)=0$, 则 $f(k/n)=0$, $k=0,1,\ldots,n$. 于是, f 至少有 $n+1$ 个互不相同的根. 因为 $\deg(f)\le n$, 所以 $f=0$ (见第一学期第五章第一讲定理 2.6). 故 $(f|f)$ 是正定的.

直接计算得

$$\|x\|^2=(x|x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}^2=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.$$

(见科斯特利金第一卷第 32 页). 于是

$$\|x\|=\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}}.$$

注解 2.4

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

科斯特利金第一卷第 32 页的公式有一个打印错误.

§3 投影

定义 3.1 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathbf{v}\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$. 定义

$$\begin{array}{rccl}\pi_{\mathbf{v}}: & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \left(\mathbf{x}|\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right)\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}=\frac{(\mathbf{x}|\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}\mathbf{v}.\end{array}$$

称 $\pi_{\mathbf{v}}$ 是关于 $\mathbf{v}$ 的投影算子.

命题 3.2 设 $\dim(V)>1$. 则上述投影算子 $\pi_{\mathbf{v}}$ 有以下性质.

(i) $\pi_{\mathbf{v}}\in\mathcal{L}(V)$ 且 $\pi_{\mathbf{v}}^2=\pi_{\mathbf{v}}$;

(ii) 对任意 $\mathbf{x}\in V$, $(\mathbf{x}-\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}))\perp\mathbf{v}$.

(iii) $\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbf{v}})=\{0,1\}$, $V^1=\langle\mathbf{v}\rangle$, $V^0=\{\mathbf{u}\in V\mid\mathbf{u}\perp\mathbf{v}\}$.

证明. (i) 注意到 $\mathbf{v}$ 是固定的向量. 于是, 内积的双线性蕴含 $\pi_{\mathbf{v}}$ 是线性的. 设 $\mathbf{x}\in V$. 则

$$\pi_{\mathbf{v}}^2(\mathbf{x})=\pi_{\mathbf{v}}\left(\frac{(\mathbf{x}|\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}\mathbf{v}\right)=\frac{(\mathbf{x}|\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{v})=\frac{(\mathbf{x}|\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}\frac{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}\mathbf{v}=\frac{(\mathbf{x}|\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}\mathbf{v}=\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}).$$

(ii) 我们计算

$$(\mathbf{x}-\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})|\mathbf{v})=(\mathbf{x}|\mathbf{v})-(\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})|\mathbf{v})=(\mathbf{x}|\mathbf{v})-\frac{(\mathbf{x}|\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}(\mathbf{v}|\mathbf{v})=(\mathbf{x}|\mathbf{v})-(\mathbf{x}|\mathbf{v})=0.$$

(iii) 因为 $\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{v})\neq\mathbf{0}$, 所以 $\pi_{\mathbf{v}}$ 不是零映射. 因为 $\dim(V)>1$, 所以存在 $\mathbf{w}\in V$ 使得 $\mathbf{w},\mathbf{v}$ 线性无关. 注意到

$$\|\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})\|=\|\left(\mathbf{w}|\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right)\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\|=|\left(\mathbf{w}|\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right)|\|\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\|=|\left(\mathbf{w}|\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right)|<\|\mathbf{w}\|,$$

其中最后一个不等式来自第三章第一讲定理 1.8. 于是, $\pi_{\mathbf{v}}$ 不是恒同算子. 由此可知, $\mu_{\pi_{\mathbf{v}}}=t(t-1)$. 根据加强版的 Hamilton-Cayley 定理(第二章第五讲定理 12.3),

$$\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbf{v}})=\{0,1\}.$$

设 $\mathbf{u}\in\langle\mathbf{v}\rangle$. 则存在 $\alpha\in\mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{u}=\alpha\mathbf{v}$. 于是,

$$\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})=\pi_{\mathbf{v}}(\alpha\mathbf{v})=\alpha\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{v})=\alpha\mathbf{v}=\mathbf{u}\implies\mathbf{u}\in V^1\implies\langle\mathbf{v}\rangle\subset V^1.$$

设 $\mathbf{w}\in V^1$. 则 $\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})=\mathbf{w}$. 即

$$\mathbf{w}=\frac{(\mathbf{x}|\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}\mathbf{v}\implies\mathbf{w}\in\langle\mathbf{v}\rangle\implies V^1\subset\langle\mathbf{v}\rangle.$$

设 $\mathbf{x}\in V^0$. 则 $\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})=0$. 由 $\pi_{\mathbf{v}}$ 的定义可知 $(\mathbf{x}|\mathbf{v})=0$. 即 $\mathbf{x}\perp\mathbf{v}$. 反之, 可直接验证 $\mathbf{x}\perp\mathbf{v}$ 蕴含 $\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})=0$. □

§4 Gram-Schmidt 正交化

例 4.1 设 $\mathbb{R}[x]_n$ 上的内积由 $(f|g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$ 给出. 求 $\mathbb{R}[x]_2$ 得一组标准正交基.
解. 从 $1,x$ 出发,

$$\epsilon_1=\frac{1}{\|1\|}=\frac{1}{\sqrt{b-a}}.$$

$$\epsilon_2'=x-(x|\epsilon_1)\epsilon_1=x-\frac{b^2-a^2}{2b-2a}=x-\frac{a+b}{2}.$$

$$\epsilon_2=\frac{x-\frac{a+b}{2}}{\sqrt{\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx}}=\frac{2\sqrt{3}x-\sqrt{3}a-\sqrt{3}b}{(b-a)\sqrt{b-a}}.$$

于是, U 得一组单位正交基是 ϵ_1,ϵ_2. □

例 4.2 设 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 是 n 维欧式空间中的非零向量. 证明: 如果 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 两两的夹角都是钝角, 则 $k\leq n+1$.
证明. 断言. 对任意 $s\in\{1,2,\ldots,k-1\}$,

(i) $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_s$ 线性无关;

(ii) 通过对 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ 实施 *Gram-Schmidt* 正交化得到的单位正交向量 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s$ 满足对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ 和 $j \in \{s+1, \ldots, k\}$, $(\epsilon_i|\mathbf{v}_j) < 0$.

断言的证明. 对 s 归纳. 当 $s = 1$ 时, $\epsilon_1 = \mathbf{v}_1/\|\mathbf{v}_1\|$ 显然线性无关. 对任意 $j \in \{2, 3, \ldots, k\}$, $(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_j) < 0 \implies (\epsilon_1|\mathbf{v}_j) < 0$. 断言成立. 设断言在 $0 \le i \le s-1$ 时成立.

当 s 时. 令 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{s-1}$ 是通过对 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{s-1}$ 实施 *Gram-Schmidt* 正交化得到的单位正交向量. 再令:

$$\epsilon_s' = \mathbf{v}_s - (\mathbf{v}_s|\epsilon_1)\epsilon_1 - \cdots - (\mathbf{v}_s|\epsilon_{s-1})\epsilon_{s-1}. \tag{1}$$

设 $j \in \{s+1, \ldots, k\}$. 则

$$(\epsilon_s'|\mathbf{v}_j) = (\mathbf{v}_s|\mathbf{v}_j) - (\mathbf{v}_s|\epsilon_1)(\epsilon_1|\mathbf{v}_j) - \cdots - (\mathbf{v}_s|\epsilon_{s-1})(\epsilon_{s-1}|\mathbf{v}_j).$$

根据题目条件和归纳假设,

$$(\mathbf{v}_s|\mathbf{v}_j) < 0, (\mathbf{v}_s|\epsilon_1) < 0, (\epsilon_1|\mathbf{v}_j) < 0, \cdots, (\mathbf{v}_s|\epsilon_{s-1}) < 0, (\epsilon_{s-1}|\mathbf{v}_j) < 0.$$

于是, $(\epsilon_s'|\mathbf{v}_j) < 0$. 特别地, $\epsilon_s' \neq \mathbf{0}$. 根据 *Gram-Schmidt* 正交化, 我们有 $\epsilon_s' \perp \epsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, s-1$. 于是, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{s-1}, \epsilon_s'$ 线性无关(第三章第一讲引理 *1.13 (ii)*). 我们得到 $\epsilon_s' \notin \langle \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{s-1} \rangle$. 再根据 (1), $\mathbf{v}_s \notin \langle \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{s-1} \rangle$. 根据 *Gram-Schmidt* 正交化(第三章第一讲定理 *1.16*), $\mathbf{v}_s \notin \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{s-1} \rangle$. 由此得出 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ 线性无关. 令 $\epsilon_s = \epsilon_s'/\|\epsilon_s'\|$. 由 $(\epsilon_s'|\mathbf{v}_j) < 0$ 得出 $(\epsilon_s|\mathbf{v}_j) < 0$, $j = s+1, s+2, \ldots, k$. 断言成立.

假设 $k > n+1$. 由断言可知, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是 V 得一组单位正交基. 于是, 存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{v}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \epsilon_i, \quad \mathbf{v}_{n+2} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \epsilon_j.$$

因为 $(\mathbf{v}_{n+1}|\mathbf{v}_{n+2}) < 0$, 所以

$$\alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n < 0. \tag{2}$$

另一方面, 由断言得第二个结论, 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$(\mathbf{v}_{n+1}|\mathbf{e}_i) < 0 \implies \alpha_i < 0 \quad 和 \quad (\mathbf{v}_{n+2}|\mathbf{e}_i) < 0 \implies \beta_i < 0.$$

故 $\alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n > 0$. 与 (2) 矛盾. $\square$