第十七周习题课

§1 关于习题

3. 设 n 是奇数. 计算

$$A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&1\\0&1&\cdots&1&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&1&0\\1&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

的 Jordan 标准型.

解. 只考虑 $n=2k+1>2$ 的情形. 设 $B=A-E$. 直接计算得 $B^3=B$ 且 B^0,B,B^2 线性相关. 于是 $\mu_B=t^3-t=t(t-1)(t+1)$. 故 B 可对角化. 因为 $\mathrm{rank}(B)=n-1$, 所以 $\dim(V^0)=1$. 而 $\mathrm{rank}(E-B)=k+1$. 故 $\dim(V^1)=k$. 进而, $\dim(V^{-1})=k$. 于是,

$$B=P^{-1}\begin{pmatrix}0&&\\&E_k&\\&&-E_k\end{pmatrix}P,$$

其中 P 是某个可逆矩阵. 则

$$A=E+B=P^{-1}EP+P^{-1}\begin{pmatrix}0&&\\&E_k&\\&&-E_k\end{pmatrix}P\sim_o\underbrace{\begin{pmatrix}1&&\\&2E_k&\\&&O_{k\times k}\end{pmatrix}}_{J_A}.\quad\square$$

5. 设 $n>1$, $k>1$. 证明: 不存在 $X\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 使得 $X^k=J_n(0)$.

证明. 假设存在 $X\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 使得 $X^k=J_n(0)$. 再设 X 的 Jordan 标准型 J_X 有 m 个 Jordan 块. 因为 $X^k=J_n(0)$, 所以 $J_X^k\sim_s J_n(0)$. 由此得出 $m=1$. 这是因为 J_X^k 是一个至少有 m 个子矩阵组成的分块对角矩阵, 它至少含有 m 个约当块. 由 Jordan 标准型的唯一性, $m=1$. 再因为 $\mathrm{rank}(J_n(0))=n-1$, 所以 $\mathrm{rank}(X)=n-1$. 故 $J_X=J_n(0)$. 因为 $k>1$, 所以 $\mathrm{rank}(J_X^k)<n-1$. 与 $J_X^k\sim_s J_n(0)$. 矛盾. $\square$

6. 设 $\dim(V)=n$, $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 由 k-维不变子空间. 证明 $\mathcal{A}$ 有 $(n-k)$-维子空间.

证明. 设 U 是 k-维 $\mathcal{A}$-不变的子空间. 不妨设 $0<k<n$. 设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k$ 是 U 的基. 并把它扩充为 V 的一组基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_{k+1},\ldots,\mathbf{e}_n$. 则 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}B&C\\O&D\end{pmatrix},$$

其中 $B\in \mathrm{M}_k(F)$, $C\in \mathrm{M}_{n-k}(F)$ (第二章第二讲命题 6.3). 由第二章第七讲例 15.4 可知, 存在 $P\in \mathrm{GL}_n(F)$, 使得 $A^t=P^{-1}AP$. 设

$$(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)=(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)P.$$

则在基底 $\epsilon_1,\dots,\epsilon_n$ 下的矩阵是

$$A^t=\begin{pmatrix} B^t & O \\ C^t & D^t \end{pmatrix}.$$

于是, $(\mathcal{A}(\epsilon_{k+1}),\dots,\mathcal{A}(\epsilon_n))=(\epsilon_{k+1},\dots,\epsilon_n)D^t$. 由此可知, $\langle \epsilon_{k+1},\dots,\epsilon_n\rangle$ 是 $(n-k)$-维 $\mathcal{A}$-不变子空间. □

§2 正交补、单位正交基与 Gram-Schmidt 正交化

例 2.1 *设 V 是 n 维欧式空间, $U_1,U_2\subset V$ 是子空间. 证明:*

$$(U_1+U_2)^{\perp}=U_1^{\perp}\cap U_2^{\perp}.$$

证明. *设 $\mathbf{x}\in(U_1+U_2)^{\perp}$. 因为 $U_1\subset U_1+U_2$, 所以 $\mathbf{x}\perp U_1^{\perp}$. 同理 $\mathbf{x}\in U_2^{\perp}$. 我们有 $\mathbf{x}\in U_1^{\perp}\cap U_2^{\perp}$. 反之, 设 $\mathbf{x}\in U_1^{\perp}\cap U_2^{\perp}$. 再设 $\mathbf{u}\in U_1+U_2$. 则存在 $\mathbf{u}_1\in U_1$ 和 $\mathbf{u}_2\in U_2$ 使得 $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$. 由此得出,*

$$(\mathbf{x}|\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=(\mathbf{x}|\mathbf{u}_1)+(\mathbf{x}|\mathbf{u}_2)=0.$$

故 $\mathbf{x}\perp\mathbf{u}$, 即 $\mathbf{x}\in(U_1+U_2)^{\perp}$. □

设 V 是 n 维欧式空间.

1. V 有单位正交基;
2. 设 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k$ 是 V 中两两正交的单位向量, 则 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k$ 可扩充为一组单位正交基;
3. 设 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ 是 V 中线性无关的特征向量, 则存在V 中单位正交基

$$\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_{k+1},\dots,\mathbf{e}_n$$

满足

$$\langle \mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k\rangle=\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k\rangle.$$

验证 3. 取 $\langle \mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k\rangle$ 的单位正交基和 $\langle \mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k\rangle^{\perp}$ 的单位正交基合起来即可.

设 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_{k+1},\dots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基,

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n,\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+\cdots+y_n\mathbf{e}_n\in V.$$

1.
$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = (x_1, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

2. $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

3. $x_i = (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 即 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}|\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \cdots + (\mathbf{x}|\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n$.

设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ 线性无关. 则存在 $U = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ 的单位正交基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ 使得

$$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)\underbrace{\begin{pmatrix} (\mathbf{v}_1|\epsilon_1) & (\mathbf{v}_2|\epsilon_1) & \cdots & (\mathbf{v}_k|\epsilon_1) \\ & (\mathbf{v}_2|\epsilon_2) & \cdots & (\mathbf{v}_k|\epsilon_2) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & (\mathbf{v}_k|\epsilon_k) \end{pmatrix}}_{T}. \quad (1)$$

特别有 $T \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$. 于是, $(\mathbf{v}_i|\epsilon_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

例 2.2 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ 列满秩. 证明: *存在 $Q \in \mathbb{R}^{m\times k}$, 其列向量两两正交长度等于 1, 和 $T \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ 上三角使得 $A = QR$. 特别地, 当 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 时, $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.*
证明. 把 A 中的列向量看出标准欧式空间 $\mathbb{R}^m$ 中的元素. 则 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(k)}$ 线性无关. 由 (1) 可知
$$A = (\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(k)}) = \underbrace{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)}_{Q}R.$$
则 Q 的列向量两两相互正交, 且 $R = T$ 是上三角可逆矩阵.

当 $m = k = n$ 时, Q 是正交矩阵(见第三章第二讲命题 3.3 (i)). $\square$

例 2.3 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 是两两正交的单位向量. 证明: *对任意 $\mathbf{x} \in V$,*
$$\|\mathbf{x}\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x}|\mathbf{v}_i)^2.$$

证明. 把 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 扩充为 V 的一组单位正交基 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$. 令
$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n.$$
则
$$\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq x_1^2 + \cdots + x_k^2 = \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x}|\mathbf{v}_i)^2 \quad (\because\ x_i = (\mathbf{x}|\mathbf{v}_i)). \quad \square$$

§3 正交投影

设 V 是 n 维欧式空间, $W \subset V$. 则 $V = W \oplus W^{\perp}$. 设 π_W 是从 V 到 W 关于上述直和的投影. 则 $\pi_W \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\pi_W^2 = \pi_W$. (见第一章第七讲命题 12.2 (ii)).

例 3.1 设 $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. 验证 $\pi_{\mathbf{v}} = \pi_{\langle \mathbf{v} \rangle}$, 其中 $\pi_{\mathbf{v}}$ 的定义见第三章第一次习题课定义 *3.1.*

证明. 对任意 $\mathbf{x} \in V$,

$$\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}|\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v} \rangle.$$

令 $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$. 则

$$(\mathbf{y}|\mathbf{v}) = (\mathbf{x} - \pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})|\mathbf{v}) = (\mathbf{x}|\mathbf{v}) - \frac{(\mathbf{x}|\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}(\mathbf{v}|\mathbf{v}) = 0.$$

于是, $\mathbf{y} \perp \mathbf{v}$. 由此得出 $\mathbf{y} \in \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp}$. 故 $\mathbf{x} = \pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) + \mathbf{y}$ 是 $\mathbf{x}$ 关于 $V = \langle \mathbf{v} \rangle \oplus \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp}$ 的分解. 由此得出, $\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \pi_{\langle \mathbf{v} \rangle}(\mathbf{x})$. $\square$

命题 3.2 设 V 是 n 维欧式空间, $W \subset V$ 是非平凡子空间. 则上述投影算子 π_W 有以下性质.

(i) $\pi_W \in \mathcal{L}(V)$ 且 $\pi_W^2 = \pi_W$;

(ii) 对任意 $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} - \pi_W(\mathbf{x}) \in W^{\perp}$.

(iii) $\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(\pi_W) = \{0, 1\}$, $V^1 = W$, $V^0 = W^{\perp}$.

证明. (i) 关于线性空间直和分解的投影都是线性的(见第一章第七讲第十二节), 于是, π_W 是线性算子. 设 $\pi_{W^{\perp}}$ 是从 V 到 $W^{\perp}$ 关于 $V = W \oplus W^{\perp}$ 的投影. 则 π_W 和 $\pi_{W^{\perp}}$ 构成完全正交等方组(见第一章第七讲第十二节). 由等方性可知, $\pi_W^2 = \pi_W$.

(ii) 由完全正交等方性可知 $\pi_W + \pi_{W^{\perp}} = \mathcal{E}$. 故对任意 $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} = \pi_W(\mathbf{x}) + \pi_{W^{\perp}}(\mathbf{x})$. 于是, $\mathbf{x} - \pi_W(\mathbf{x}) = \pi_{W^{\perp}}(\mathbf{x}) \in W^{\perp}$.

(iii) 由关于线性空间直和分解的投影的定义可知, 对任意 $\mathbf{x} \in W$, 我们有 $\pi_W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. 于是, $W \subset V^1$. 对任意 $\mathbf{x} \in W^{\perp}$, 我们有 $\pi_W(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. 于是, $W^{\perp} \subset V^0$. 因为 $V = W \oplus W^{\perp}$ 且 $V^1 + V^0$ 是直和(第二章第三讲引理 9.7), 所以 $V = V^1 \oplus V^0$. 由此得出,

$$\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(\pi_W) = \{0, 1\}, \quad V^1 = W, \quad V^0 = W^{\perp}. \quad \square$$

§4　向量到子空间的距离

定义 4.1 设 V 是 n 维欧式空间, $W \subset V$ 是非平凡子空间, $\mathbf{x} \in V$. 则

$$\min_{\mathbf{w}\in W}\{\|\mathbf{x}-\mathbf{w}\|\}$$

称为 $\mathbf{x}$ 到 W 的距离, 记为 $\mathrm{d}(\mathbf{x}, W)$.

定理 4.2 利用上述定义的记号, 我们有

$$\mathrm{d}(\mathbf{x}, W) = \|\mathbf{x} - \pi_W(\mathbf{x})\|.$$

证明. 对任意 $\mathbf{w} \in W$,

$$\mathbf{x} - \mathbf{w} = \underbrace{\mathbf{x} - \pi_W(\mathbf{x})}_{\mathbf{y}} + \underbrace{\pi_W(\mathbf{x}) - \mathbf{w}}_{\mathbf{z}}.$$

根据命题 3.2 (ii), $\mathbf{y} \in W^{\perp}$. 因为 $\pi_W(\mathbf{x}), \mathbf{w} \in W$, 所以 $\mathbf{z} \in W$. 由此得出 $\mathbf{y} \perp \mathbf{z}$. 根据勾股定理(第三章第一讲例 1.14),

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2 \implies \|\mathbf{x}-\mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{y}\|.$$

因为 $\pi_W(\mathbf{x}) \in W$, 所以 $\mathrm{d}(\mathbf{x}, W) = \|\mathbf{y}\|$. $\Box$

问题. 设 $W = \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_d \rangle \subset V$, 其中 $0 < d < \dim(V)$ 且 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_d$ 线性无关. 给定 $\mathbf{x} \in V$, 求 $\pi_W(\mathbf{v})$.

方法之一. 求 W 的一组单位正交基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_d$. 则

$$\pi_W(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\epsilon_1)\epsilon_1 + \cdots + (\mathbf{x}|\epsilon_d)\epsilon_d.$$

验证正确性. 把 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_d$ 扩充为 V 的一组单位正交基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_d, \epsilon_{d+1}, \ldots, \epsilon_n$. 则 $\epsilon_{d+1}, \ldots, \epsilon_n \in W^{\perp}$ 且

$$\mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{x}|\epsilon_1)\epsilon_1 + \cdots + (\mathbf{x}|\epsilon_d)\epsilon_d}_{\mathbf{u}} + \underbrace{(\mathbf{x}|\epsilon_{d+1})\epsilon_{d+1} + \cdots + (\mathbf{x}|\epsilon_n)\epsilon_n}_{\mathbf{v}}.$$

(见第三章第二讲命题 1.21). 于是, $\mathbf{u} \in W$ 和 $\mathbf{v} \in W^{\perp}$. 故 $\pi_W(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\epsilon_1)\epsilon_1 + \cdots + (\mathbf{x}|\epsilon_d)\epsilon_d$. 验证完毕.

例 4.3 设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是标准欧式空间 $\mathbb{R}^3$ 中的向量. 计算 $\pi_{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle}(\mathbf{x})$.

解. 设 $W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$. 利用 Gram-Schmidt 正交化, 我们有

$$\epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{w}_1, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

是 W 的一组单位正交基. 于是, 所求的正交投影等于

$$\mathbf{u} = (\mathbf{x}|\epsilon_1)\epsilon_1 + (\mathbf{x}|\epsilon_2)\epsilon_2 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

由此可知, $\mathrm{d}(\mathbf{x}, W) = \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| = 1/\sqrt{3}$. $\square$