第十八周习题课

§1 关于习题

5. 设 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k \in V\setminus\{\mathbf{0}\}$. 证明: 如果 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 两两相交都是 $\pi/3$, 则 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 线性无关.

证明. 注意到 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 线性无关当且仅当它们的单位化向量线性无关. 于是, 不妨设 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 都是单位向量. 此时, 这些向量的 Gram 矩阵是

$$G=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

于是, $\det(G)=(1+(k-1)/2)(1/2)^{k-1}\neq 0$. 故$\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 线性无关. □

§2 基本例子

记号: 在以下各节中 V 是 n 维欧式空间.

例 2.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规. 证明: $\ker(\mathcal{A})=\ker(\mathcal{A}^*)$.

证法一. 设 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵是 A. 则 $\mathcal{A}^*$ 在同样基底下的矩阵是 A^t. 因为 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A^t)$, 所以 $\operatorname{rank}(\mathcal{A}^*)=\operatorname{rank}(\mathcal{A})$. 于是, 当 $\mathcal{A}$ 可逆时, $\mathcal{A}^*$ 也可逆. 我们有 $\ker(\mathcal{A})=\{0\}\Longrightarrow\ker(\mathcal{A}^*)=\ker(\mathcal{A})$.

设 $\ker(\mathcal{A})\neq\{\mathbf{0}\}$. 由第三章第三讲引理 *5.14*, $0\in\operatorname{spec}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})\cap\operatorname{spec}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}^*)$. 同样的引理蕴含 $V^0_{\mathcal{A}}=V^0_{\mathcal{A}^*}$, 即 $\ker(\mathcal{A})=\ker(\mathcal{A}^*)$.

证法二. 设 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$ 在 $\ker(\mathcal{A})$ 中. 则 $A(x_1,\ldots,x_n)^t=(0,\ldots,0)^t$. 令 $(y_1,\ldots,y_n)^t=A^t(x_1,\ldots,x_n)^t$. 因为 $AA^t=A^tA$, 所以

$$\begin{aligned} y_1^2+\cdots+y_n^2&=(y_1,\ldots,y_n)(y_1,\ldots,y_n)^t\\ &=(x_1,\ldots,x_n)AA^t(x_1,\ldots,x_n)^t\\ &=(x_1,\ldots,x_n)A^tA(x_1,\ldots,x_n)^t=0.\end{aligned}$$

于是, $y_1=\cdots=y_n=0$. 由此得出, $\mathbf{x}\in\ker(\mathcal{A}^*)$, 即 $\ker(\mathcal{A})\subset\ker(\mathcal{A}^*)$. 类似可证明 $\ker(\mathcal{A}^t)\subset\ker(\mathcal{A})$.

证法三. 设 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_{2s+1},\dots,\lambda_\ell$ 非零, 而 $\lambda_{\ell+1}=\cdots=\lambda_n=0$. 因为 $N(\alpha,\beta)$ 可逆, 所以

$$A=\begin{pmatrix} B & O \\ O & O \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t=\begin{pmatrix} B^t & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 $B\in \mathrm{GL}_\ell(\mathbb{R})$. 由此可知, $\mathbf{x}\in\ker(\mathcal{A})$ 当且仅当 $\mathbf{x}=x_{\ell+1}\mathbf{e}_{\ell+1}+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$ 当且仅当 $\mathbf{x}\in\ker(\mathcal{A}^*)$. □

例 2.2 在标准欧式空间 $\mathbb{R}^3$ 中

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz=2$$

的正交规范型. 它代表什么曲面?

解. 二次型 $q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz$ 在标准基 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 下矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由第一学期第三章第一讲第六页的例子可知

$$\chi_A=(t+1)(t-2)^2.$$

于是, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$. 注意到 V^{λ_1} 是方程 $x_1+x_2+x_3=0$ 的解空间. 于是,

$$V^{\lambda_1}=\langle\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\rangle=\langle\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_{\text{单位正交基}}\rangle.$$

而

$$V^{\lambda_2}=\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle=\langle\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}_{\text{单位正交基}}\rangle.$$

于是, 在单位正交基

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \epsilon_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \epsilon_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

下二次型的矩阵是 $\mathrm{diag}(2,2,-1)$. 换言之, 令 $P = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$. 则 P 是正交矩阵且 $P^tAP = \mathrm{diag}(2,2,-1)$. 设 $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = x'\epsilon_1 + y'\epsilon_2 + z'\epsilon_3$. 则

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

见第一章第三讲定理 *5.2.* 于是,

$$\begin{aligned} q(\mathbf{v}) &= (x,y,z)A(x,y,z)^t = (x',y',z')P^tAP(x',y',z') \\ &= (x',y',z')\mathrm{diag}(2,2,-1)(x',y',z') = 2(x')^2 + 2(y')^2 - (z')^2. \end{aligned}$$

故曲面在基底 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 下的方程是

$$2(x')^2 + 2(y')^2 - (z')^2 = 2.$$

它是旋转单叶双曲面, 其旋转轴是 ϵ_3. $\square$

例 2.3 设 $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 且 $-1 \notin \mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(A)$. 证明*:*

(i) $E + A$ 可逆*;*

(ii) $S := (E-A)(E+A)^{-1}$ 斜对称*;*

(iii) $A = (E-S)(E+S)^{-1}$.

证明. 设 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$A = P^t \begin{pmatrix} N(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\cos(\theta_s), \sin(\theta_s)) & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} P.$$

见第三章第三讲定理 *8.1*. 则

$$E+A=P^t\begin{pmatrix} N(1+\cos(\theta_1),\sin(\theta_1)) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(1+\cos(\theta_s),\sin(\theta_s)) & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}P$$

(i) 由上式可得 $E+A$ 可逆.

(ii) 直接计算得

$$(E_2+N(\cos(\theta),\sin(\theta)))^{-1}=N(1+\cos(\theta),\sin(\theta))^{-1}=\frac{1}{2+2\cos(\theta)}N(1+\cos(\theta),-\sin(\theta))$$

且

$$\begin{aligned} B_2(\theta) &:= (E_2-N(\cos(\theta),\sin(\theta)))(E_2+N(\cos(\theta),\sin(\theta)))^{-1} \\ &= \frac{1}{2+2\cos(\theta)}\begin{pmatrix} 0 & 2\sin(\theta) \\ -2\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SSM}_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

由矩阵分块运算得

$$(E-A)^{-1}(E+A)=P^t\begin{pmatrix} B_2(\theta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & B_2(\theta_s) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}P \in \mathrm{SSM}_n(\mathbb{R}).$$

(ii) 的另证. 令 $C=(E-A)(E+A)^{-1}$. 则

$$\begin{aligned} C^t &= (E+A^t)^{-1}(E-A^t)=(E+A^{-1})^{-1}(E-A^{-1}) \\ &= (E+A^{-1})^{-1}A^{-1}A(E-A^{-1})=(A+E)^{-1}(A-E) \\ &= (A-E)(A+E)^{-1}=-C. \end{aligned}$$

(注: 设 $M,N\in \mathrm{M}_n(F)$ 且 M 可逆. 如果 $MN=NM$, 则 $NM^{-1}=M^{-1}N$.*)*

(iii) 根据第三章第三讲例 *7.2*, $E+S$ 可逆. 由矩阵分块计算的性质, 我们只要验证

$$N(\cos(\theta),\sin(\theta))=(E_2-B_2(\theta))(E_2+B_2(\theta))^{-1}$$

即可. 注意到

$$(E_2+B_2(\theta))^{-1}=N\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\theta),\frac{1}{2}\sin(\theta)\right).$$

于是

$$\begin{aligned}(E_2-B_2(\theta))(E_2+B_2(\theta))^{-1}&=N\left(1,\frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}\right)N\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\theta),\frac{1}{2}\sin(\theta)\right)\\&=N(\cos(\theta),\sin(\theta)).\quad\square\end{aligned}$$

§3 反射

定义 3.1 设 $\mathbf{v}\in V$ 是单位向量. 定义

$$\begin{array}{rccc}\mathcal{R}_{\mathbf{v}}: & V & \longrightarrow & V\\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x}-2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v}\end{array}$$

称之为关于 $\mathbf{v}$ 的反射.

命题 3.2 设 $\mathcal{R}_{\mathbf{v}}$ 是上述定义中的反射. 则 $\mathcal{R}_{\mathbf{v}}$ 是正交算子.

证明. 先验证 $\mathcal{R}_{\mathbf{v}}$ 是线性的. 因为 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{A}:=2(\cdot|\mathbf{v})\mathbf{v}$ 都是线性算子, 且 $\mathcal{R}_{\mathbf{v}}=\mathcal{E}-\mathcal{A}$, 所以 $\mathcal{R}_{\mathbf{v}}$ 是线性算子. 根据第三章第二讲命题 4.9, 我们还需要验证对任意 $\mathbf{x}\in V$,

$$\|\mathbf{x}\|=\|\mathcal{R}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\|.$$

计算得

$$(\mathcal{R}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})|\mathcal{R}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}))=(\mathbf{x}-2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v}\,|\,\mathbf{x}-2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v})=(\mathbf{x}|\mathbf{x})-4(\mathbf{x}|\mathbf{v})^2+4(\mathbf{x}|\mathbf{v})^2(\mathbf{v}|\mathbf{v})\overset{\|\mathbf{v}\|=1}{=}(\mathbf{x}|\mathbf{x}).$$

故 $\mathcal{R}_{\mathbf{v}}$ 是正交算子. $\square$

命题 3.3 设 $\dim(V)=n$ 和 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 是反射当且仅当它在 V 的某组单位正交基下的矩阵是对角阵且对角线上的元素由 $n-1$ 个 *1* 和一个 -1 组成.

证明. 设 $\mathcal{A}=\mathcal{R}_{\mathbf{v}}$ 如定义 3.1 给出. 直接计算得 $\mathcal{R}_{\mathbf{v}}(\mathbf{v})=-\mathbf{v}$ 且对任意 $\mathbf{x}\in\langle\mathbf{v}\rangle^{\perp}$, $\mathcal{R}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$. 于是, $\langle\mathbf{v}\rangle\subset V^{-1}$ 且 $\langle\mathbf{v}\rangle^{\perp}\subset V^{1}$. 因为 $V=\langle\mathbf{v}\rangle\oplus\langle\mathbf{v}\rangle^{\perp}$ 且 $V^{-1}+V^{1}$ 是直和(第二章第三讲引理 9.7), 所以 $V^{-1}=\langle\mathbf{v}\rangle$ 且 $V^{1}=\langle\mathbf{v}\rangle^{\perp}$. 设 $\mathbf{e}_1=\mathbf{v}$, $\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 V^1 的一组单位正交基. 则 $\mathcal{R}_{\mathbf{v}}$ 在单位正交基 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix}-1 & \\ & E_{n-1}\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

反之, 设 $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵是对角阵且对角线上的元素由 $n-1$ 个 1 和一个 -1 组成. 不妨设 $\mathcal{A}(\mathbf{e}_j)=-1$. 则 $\mathcal{A}(\mathbf{e}_i)=\mathbf{e}_i$, $i\neq j$. 设

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\cdots+x_n\mathbf{e}_n.$$

则

$$\mathcal{A}(\mathbf{x})=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_{j-1}\mathbf{e}_{j-1}-x_j\mathbf{e}_j+x_{j+1}\mathbf{e}_{j+1}+\cdots+x_n\mathbf{e}_n.$$

而

$$\mathcal{R}_{\mathbf{e}_j}(\mathbf{x})=\mathbf{x}-2x_j\mathbf{e}_j=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_{j-1}\mathbf{e}_{j-1}-x_j\mathbf{e}_j+x_{j+1}\mathbf{e}_{j+1}+\cdots+x_n\mathbf{e}_n=\mathcal{A}(\mathbf{x}).$$

故 $\mathcal{A}=\mathcal{R}_{\mathbf{e}_j}$. □

推论 3.4 设 $\mathcal{R}_{\mathbf{v}}$ 是反射. 证明: $\mathcal{R}_{\mathbf{v}}^2=\mathcal{E}$.

证明. 可由定义直接验证或利用上述命题 3.3 中矩阵的平方是单位矩阵推出. □

例 3.5 设 $\dim(V)=2$, $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是 V 的一组单位正交基, $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$, 它们在 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 下的矩阵分别是

$$A=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\quad 和 \quad B=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

证明:

(i) $\mathcal{A}$ 不是反射但 $\mathcal{B}$ 是反射;

(ii) $\mathcal{A}=\mathcal{B}\mathcal{R}_{\mathbf{e}_2}$.

证明. (i) 注意到 $\chi_{\mathcal{A}}=t^2-2\cos(\theta)t+1$. 于是, -1 不是 $\mathcal{A}$ 的特征根. 根据命题 3.3, A 不是反射. 类似地计算可得 $\chi_{\mathcal{B}}=t^2-1$. 故 $\mathcal{B}$ 由两个特征根 ±1. 因为 B 是正交矩阵, 所以 $\mathcal{B}$ 是正交算子. 于是, $\mathcal{B}$ 在 V 的某组基下的矩阵是 $\mathrm{diag}(1,-1)$ (第三章第三讲定理 8.1). 由命题 3.3 可知, $\mathcal{B}$ 是反射.

(ii) 注意到 $\mathcal{R}_{\mathbf{e}_2}$ 在 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 下的矩阵等于 $\mathrm{diag}(1,-1)$. 而 $A=B\mathrm{diag}(1,-1)$. 由线性算子和矩阵表示的代数同构可知 $\mathcal{A}=\mathcal{B}\mathcal{R}_{\mathbf{e}_2}$. □

记号. 我们用 $\mathrm{diag}(M_1,\dots,M_k)$ 记分块对角矩阵

$$M=\begin{pmatrix}M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_k\end{pmatrix}.$$

定理 3.6 设 $\dim(V)=n$ 且 $\mathcal{A}$ 是 V 上正交算子. 证明 $\mathcal{A}$ 是至多 n 个反射的复合.

证明. 由第三章第三讲定理 8.1, 可设 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵是

$$A=\operatorname{diag}(N(\cos(\theta_1),\sin(\theta_1)),\ldots,N(\cos(\theta_s),\sin(\theta_s)),1,\ldots,1).$$

对 $i\in\{1,2,\ldots,s\}$. 设 $\mathcal{A}\neq\mathcal{E}$. 令

$$B_i=\operatorname{diag}(\underbrace{1,\ldots,1,}_{2(i-1)}\begin{pmatrix}\cos(\theta_i) & \sin(\theta_i)\\ \sin(\theta_i) & -\cos(\theta_i)\end{pmatrix},1,\ldots,1),\ C_i=\operatorname{diag}(\underbrace{1,\ldots,1,}_{2(i-1)}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},1,\ldots,1).$$

对 $j\in\{2s+1,,\ldots,n\}$ 且 $\lambda_j=-1$, 令

$$D_j=\operatorname{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1},-1,1,\ldots,1).$$

由例 3.5 可知,

$$A=(B_1C_1)\cdots(B_sC_s)\prod_{j=2s+1,\lambda_j=-1}^{n}D_j. \tag{1}$$

而上式右侧的每个矩阵都是正交矩阵, 每个矩阵只有两个特征根 -1 和 1, 且 -1 的代数重数等于 1. 设 $\mathcal{B}_i,\mathcal{C}_i,\mathcal{D}_j$ 是在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵分别为 B_j,C_j 和 D_j 的线性算子. 根据命题 3.3, 这些算子都是反射. 根据 (1),

$$\mathcal{A}=\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1\cdots\mathcal{B}_s\mathcal{C}_s\prod_{j=2s+1,\lambda_j=-1}^{n}\mathcal{D}_j.$$

注意到恒同映射可以理解为零个反射的“复合”. □