第十九周习题课

§1　关于第十七周习题

4. 设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(i) 设 A 的列是标准欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组单位正交基. 证明: A 的行是标准欧式（行）空间 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 的一组单位正交基;

(ii) 设 A 的列是标准欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的两两正交的向量. 问: A 的行是不是标准欧式（行）空间 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 的两两正交的向量?

证明. (i) 由假设可知对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $(\vec{A}^{(i)})^t \vec{A}^{(j)} = \delta_{i,j}$. 再注意到 $(\vec{A}^{(i)})^t$ 是 A^t 第 i 行. 我们推出 $A^t A = E$. 由此得出 $AA^t = E$. (见上学期第二章第五讲推论 5.1). 于是, 对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\vec{A}_i (\vec{A}_j)^t = \delta_{i,j}$. 由此可知, A 的行是标准欧式（行）空间 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 的一组单位正交基.

(ii) 考虑

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

直接计算得 A 的两列正交但它的两行不正交.

(注意: 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 则 $AB = E \implies BA = E$. 但 AB 是对角阵不蕴含 BA 是对角阵.)

5. (iii) $\implies$ *(i).* 对任意 $\mathbf{x} \in V$, $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)^2 \implies \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基.

证明. 先设 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$. 则

$$\|\mathbf{e}_1\|^2 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_i)^2 = \|\mathbf{e}_1\|^4 + \sum_{i=2}^n (\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_i)^2. \tag{1}$$

于是,

$$\|\mathbf{e}_1\|^4 \le \|\mathbf{e}_1\|^2 \implies \|\mathbf{e}_1\|^2 \le 1 \implies \|\mathbf{e}_1\| \le 1.$$

因为 $\dim(V) = n$, 所以存在非零向量 $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle^\perp$. 由 (iii) 可知,

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}|\mathbf{e}_i)^2 = (\mathbf{v}|\mathbf{e}_1)^2 \le \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{e}_1\|^2 \implies \|\mathbf{e}_1\| \ge 1.$$

故 $\mathbf{e}_1$ 是单位向量. 由 (1) 可知,

$$1 = 1 + \sum_{i=2}^{n} (\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_i)^2 \implies \sum_{i=2}^{n} (\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_i)^2 = 0 \implies (\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_i) = 0,\ i = 2, 3, \ldots, n.$$

故 $\mathbf{e}_1$ 与 $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ 都正交. 同理可证对任意 $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$, $\mathbf{e}_i$ 是单位向量并与 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ 都正交. □

§2 关于第十八周习题

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

计算正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵.

解. 直接计算得 $\chi_A(t) = (t-1)^2(t+1)$. 矩阵 A 的特征根 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = -1$. 特征子空间 V_1^{λ} 是方程 $x_1 - x_3 = 0$ 的解空间. 故

$$V^{\lambda_1} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

因为 $V^{\lambda_2} = (V^{\lambda_1})^{\perp}$, 所以

$$V^{\lambda_2} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

故正交矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad P^t A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

2. 设实对称矩阵

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \cdots & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \cdots & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & \cdots & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & \cdots & -\frac{1}{4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

计算 A_n 的签名.

解. 由已知的行列式展开公式得

$$\chi_A(t)=\left(t-1+\frac{n-1}{4}\right)\left(t-1-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(t+\frac{n-5}{4}\right)\left(t-\frac{5}{4}\right)^{n-1}.$$

1. $n=1$. 特征根是 1. 于是, 签名为 $(1,0)$;
2. $n=2$. 特征根是 $3/4$ 和 $5/4$. 于是, 签名为 $(2,0)$;
3. $n=3$. 特征根是 $1/2$ 和 $5/4$ (重数 2). 于是, 签名为 $(3,0)$;
4. $n=4$. 特征根是 $1/4$ 和 $5/4$ (重数 3). 于是, 签名为 $(4,0)$;
5. $n=5$. 特征根是 0 和 $5/4$ (重数 4). 于是, 签名为 $(4,0)$;
6. $n>5$. 特征根是 $-(n-5)/4$ 和 $5/4$ (重数 $n-1$). 于是, 签名为 $(n-1,1)$. □

3. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 是正规算子. 证明:

(i) $\ker(\mathcal{A})^{\perp}=\operatorname{im}(\mathcal{A})$*;*

(ii) $\operatorname{im}(\mathcal{A})=\operatorname{im}(\mathcal{A}^*)$.

证明. (i) 设 $\mathbf{x}\in\operatorname{im}(\mathcal{A})$. 则存在 $\mathbf{y}\in V$ 使得 $\mathbf{x}=\mathcal{A}(\mathbf{y})$. 设 $\mathbf{z}$ 是 $\ker(\mathcal{A})$ 中的任意元素, 我们计算

$$(\mathbf{z}|\mathbf{x})=(\mathbf{z}|\mathcal{A}(\mathbf{y}))=(\mathcal{A}^*(\mathbf{z})|\mathbf{y}).$$

由第十八次习题课例 2.1 可知, $\ker(\mathcal{A})=\ker(\mathcal{A}^*)$. 于是, $\mathcal{A}^*(\mathbf{z})=0$. 根据上述计算得到 $(\mathbf{z}|\mathbf{x})=0$. 我们得到 $\mathbf{z}\perp\mathbf{x}$. 从而, $\mathbf{x}\in\ker(\mathcal{A})^{\perp}$. 即 $\operatorname{im}(\mathcal{A})\subset\ker(\mathcal{A})^{\perp}$. 因为

$$\dim(\operatorname{im}(\mathcal{A}))=\dim(V)-\dim(\ker(\mathcal{A}))\quad \text{和}\quad \dim(\ker(\mathcal{A})^{\perp})=\dim(V)-\dim(\ker(\mathcal{A})),$$

其中第一个等式是核像维数定理(第一章第二讲命题 4.15 (ii)), 第二个等式来自第三章第二讲定理 2.2 (ii) 和第一章第二讲命题 4.16. 于是,

$$\operatorname{im}(\mathcal{A})\subset\ker(\mathcal{A})^{\perp}\implies\operatorname{im}(\mathcal{A})=\ker(\mathcal{A})^{\perp}.$$

(见第一章第二讲命题 4.15 (i)).

(ii) 因为 $\mathcal{A}$ 正规, 所以 $\mathcal{A}^*$ 也正规(第三章第三讲引理 5.12). 根据 (i), 我们有 $\ker(\mathcal{A}^*)^{\perp}=\operatorname{im}(\mathcal{A}^*)$. 因为 $\ker(\mathcal{A})=\ker(\mathcal{A}^*)$, 所以 $\ker(\mathcal{A})^{\perp}=\ker(\mathcal{A}^*)^{\perp}$. 根据 (i), 我们得到 $\operatorname{im}(\mathcal{A})=\operatorname{im}(\mathcal{A}^*)$. □

4. 设 A 是斜对称实矩阵. 证明: A^2 对称且半负定.

证明. 根据第三章第三讲定理定理 7.1, 存在正交矩阵 P 使得

$$A = P^t \begin{pmatrix} N(0,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(0,\beta_s) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} P.$$

于是

$$A^2 = P^t \underbrace{\begin{pmatrix} -\mathrm{diag}(\beta_1^2,\beta_1^2) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -\mathrm{diag}(\beta_s^2,\beta_s^2) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{N} P.$$

因为 N 对称, 半负定且 $A \sim_c N$, 所以 A 是半负定的. $\square$

5. 设 $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ 是正定算子. 证明: 如果 $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$, 则 $\mathcal{AB}$ 也是正定算子.

证明. 设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基, $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 在该组基下的矩阵分别是 A 和 B. 根据第三章第三讲命题 6.10, A 和 B 都是正定矩阵. 因为 $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$, 所以 $AB=BA$. 我们计算

$$(AB)^t = B^tA^t = BA = AB.$$

故 AB 是对称矩阵.

根据第二章第五次习题课例 3.1, 存在 $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得 $S = R^{-1}AR$ 和 $T = R^{-1}BR$ 都是上三角(复)矩阵. 因为特征根是相似不变量, 所以 S 的特征根与 A 的特征根相同且都是正实数(第三章第三讲推论 6.3). 于是, S 的主对角线上的元素都是正实数. 同理 T 的主对角线上的元素也都是正实数.

我们有 $ST = R^{-1}ABR$. 直接验证得 ST 也是上三角矩阵且ST 的主对角线上的元素都是正实数. 故 ST 的特征根都是正实数. 因为 $ST \sim_s AB$, 所以 AB 的特征根也都是正实数. 再根据第三章第三讲推论 6.3, AB 正定. $\square$

Another Proof. By Example 2.1 in the second exercise session of Chapter 2, AB is similar to a positive definite matrix. So all eigenvalues of AB are positive real numbers. Since $AB = BA$, we have that AB is symmetric. It follows from Corollary 6.3 in the third lecture of Chapter 3 that AB is positive definite. $\square$

6. 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$ 是对称算子. 证明: 如果 $\mathcal{A}$ 正定, 则 $\mathcal{AB}$ 的特征根都是实数.

证明. 我们来证明该习题的矩阵版. 因为 A 正定, 所以 A^{-1} 正定(见第一章第六讲例 9.17) 于是存在 $P\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^tA^{-1}P=E$ 由此可知可知 $P^t=(A^{-1}P)^{-1}$. 于是, 由第二个等式可知

$$P^tBP=(A^{-1}P)^{-1}BP=P^{-1}(AB)P.$$

我们得到 $P^tBP\sim_s AB$. 于是, P^tBP 和 AB 有相同的特征根. 因为 B 对称, 所以 P^tBP 对称. 根据第三章第三讲定理 6.1, P^tBP 的特征根都是实数. 于是, AB 的特征根也都是实数. □

Another Proof. By Example 9.17 in the sixth lecture of Chapter 9.17, A^{-1} is positive definite. By Theorem 6.7 in the third lecture of Chapter 3, there exists $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ such that

$$P^tA^{-1}P=E\quad\text{and}\quad P^tBP=C,$$

where C is diagonal. We have

$$C=EC=(P^tA^{-1}P)^{-1}P^tBP=P^{-1}A(P^t)^{-1}P^tBP=P^{-1}(AB)P.$$

So $C\sim_s AB$. Hence, all eigenvalues of AB are elements in the diagonal of C, which are real numbers. □

§3 关于期末考试

2.1 线性映射(算子)在不同基底下的矩阵方阵相似. (利用核与商空间证明秩不等式不考, 对偶映射不要求)

2.2 极小多项式和不变子空间. (核核分解不考)

2.3 特征向量、特征值、特征子空间, 相似不变量. (商算子不考)

2.4 对角化与循环子空间. (完全正交等方组和谱分解定理不考)

2.5 循环子空间分解定理的结论, Hamilton-Cayley 定理加强版及其推论，不可分子空间的性质. (广义特征子空分解和循环子空间分解的证明不考, 习题课例 2.4 和例 3.4 不要求)

2.6 Jordan 标准型基本理论, 如何通过代数重数、几何重数和极小多项式根的重数估计 Jordan 块的个数, 从而计算 Jordan 标准型. (习题课第四节不要求)

2.7 了解 Jordan 标准型唯一性的结论, 会应用计算 Jordan 标准型的一般方法和判定方阵相似的方法. (定理证明不要求, 习题课第四节不要求)

3.1 基本都会涉及到. (矩阵和多项式的空间不考, 习题课例 4.2 不要求)

3.2 正交补计算和直和性质、正交矩阵和等价，正规算子和矩阵的定义和例子, 正交算子的等价条件(一般的伴随算子不考，习题课第四节不要求)

3.3 正规算子的正交标准型, 对称，斜对称和正交矩阵（算子）的标准型(特征根)；特别是对称矩阵标准型的应用包括，计算正交矩阵把对称矩阵化为标准型，利用特征值计算对称矩阵的签名，把一个正定矩阵和一个对称矩阵同时化为标准型，正定算子的等价条件等. 重点是对称矩阵标准型的计算和各种正交等价标准型的应用(正规算子的正交标准型的推导过程不考, 习题课例 3.5 和 3.6 不要求)

期末考试十道题，第二章 60%, 第三章 40%.