线性代数作业二

教师：李子明；助教：薛威、张晓晶。

1. 求行列式 $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ 的值

2. 设 $f: X \to Y$ 为映射，任给 X 的子集族 $\{A_j\}_{j\in J}$

(1) 证明 $f(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} f(A_j)$

(2) 思考 $f(\bigcap_{j\in J} A_j) = \bigcap_{j\in J} f(A_j)$ 是否正确，如果不正确举一个反例

(3) 证明 $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(A_j)$

(4) 思考 $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} A_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(A_j)$ 是否正确，如果不正确举一个反例

(下面两道题为思考题，难度较大, 大家视自己情况来做)

3. 假设 X,Y 为集合，一个 X 到 Y 的关系是指 $X \times Y$ 的一个子集 R。给我一个 $f: X \to Y$ 映射，我们称 f 的图像是 $X \times Y$ 的一个子集 graph(f)=$\{(x, f(x))|x \in X\}$。

证明存在一个映射 f，使得 graph(f)=R 当且仅当 R 满足

(1) 任给 $x \in X$, 存在 $y \in Y$ 使得 $(x, y) \in R$

(2) 若 $(x, y_1), (x, y_2) \in R$，则 $y_1 = y_2$

4. (这道题我们主要为了说明集合意义下单射和映射存在左逆，满射和映射存在右逆是等价的)

定义：

1. 两个关系的复合：R 是 X 到 Y 的关系，S 是 Y 到 Z 的关系，S 和 R 的复合是一个 X 到 Z 的关系 $S \circ R$=$\{(x, z) \in X \times Z | \exists y \in Y s.t. (x, y) \in R, (y, z) \in S\}$

2. 一个关系的对偶关系：R 是 X 到 Y 的关系，Y 到 X 的关系 $R^{op} = \{(y, x) \in Y \times X | (x, y) \in R\}$ 称为 R 的对偶关系

3. 恒同关系：对于一个集合 X 的恒同关系 id_X 是指 $X \times X$ 的子集 $\{(x, x)|x \in X\}$

证明：

(1) 设 $f: X \to Y$,$g: Y \to Z$ 为映射, 验证 $graph(g \circ f) = graph(g) \circ graph(f)$

(2) 思考如果存在 f 使得 graph(f)=R, 那么什么时候 R 的对偶关系也能成为一个映射的图像

(3) 证明 f 是单射当且仅当 $id_X = R^{op} \circ R$

(4) 证明 f 是满射当且仅当 $id_Y = R \circ R^{op}$

(5) 如果存在 f 使得 graph(f)=R, 那么在 f 是单射的时候存在 $g: Y \to X$ 使得 $graph(g) \supset R^{op}$，并且在此时 $g \circ f = id_X$

(6) 如果存在 f 使得 graph(f)=R, 那么在 f 是满射的时候存在 $g: Y \to X$ 使得 $graph(g) \subset R^{op}$，并且在此时 $f \circ g = id_Y$

(7) 如果 $f: X \to Y$,$g: Y \to X$ 为映射，证明若 $g \circ f = id_X$ 那么 f 为单射，g 为满射

(8) 综合以上结论，我们证明集合意义下的单射和映射存在左逆，满射和映射存在右逆是等价的