线性代数作业三

教师：李子明；助教：薛威、张晓晶。

1. 证明集合 $T=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|a-b\in\mathbb{Z}\}$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 上的等价关系，且几何上 $\mathbb{R}$ 关于这个等价关系的商集可以和圆周等同起来。

2-5.《代数学引论.基础代数》（柯斯特利金）Page.30. 习题 1、2、3、4。

6.(思考题)《代数学引论.基础代数》（柯斯特利金）Page.26. 习题 2。

7.(思考题) 对于 $\mathbb{R}$ 我们定义等价关系 ” $\sim$ ” : $\forall\, x,y\in\mathbb{R},\ x\sim y\iff x-y\in\mathbb{Q}$, 证明 $\mathbb{R}/\sim$ 是不可数集，并试说明其与 $\mathbb{R}$ 等势。

8.(思考题) （本题旨在ZFC公理体系下证明可数个可数集的并仍可数）

定义：在集合意义下，对一个集族 $\{A_i\}_{i\in I}$ 有两个特殊的对象：乘积 $\prod_{i\in I}A_i$, 以及不交并 $\coprod_{i\in I}A_i$。$\prod_{i\in I}A_i$ 是指 $\{(a_i)_{i\in I}|a_i\in A_i\}$ 组成的集合，严格地来说 $f:I\longrightarrow\bigcup_{i\in I}A_i$ 映射使得 $f(i)\in A_i,\forall i\in I$，这样的映射全体称为 $\prod_{i\in I}A_i$。$\coprod_{i\in I}A_i$ 是指 $\bigcup_{i\in I}(A_i\times\{i\})$, 形象地来看即为每一个 A_i 带一个标签“i”以区分其与其它 A_j 里的元素。

选择公理的两种等价的描述：

(1) $f:\ X\longrightarrow Y$ 为满射，则存在映射 $s:\ Y\longrightarrow X\ s.t.\ f\circ s=id_Y$。

(2) 指标集 I 非空，$\forall\, i\in I,\ X_i\neq\varnothing$，那么 $\prod_{i\in I}X_i$ 非空。

题目：

1). 证明上述两个命题(1)、(2)等价；

2). 证明若 $\{X_n\}_{n\in N}$ 集族，X_n 两两不交，那么 $\bigcup_{n\in N}X_n$ 为可数集；

3). 若 $\{X_n\}_{n\in N}$ 集族，X_n 与 X_m 之间可能相交的话，证明存在 $\coprod_{n\in N}X_n\longrightarrow\bigcup_{n\in N}X_n$ 的满射；

4). 若 X 为无限集，证明 X 可数 $\iff\exists\, g:\ N\longrightarrow X$ 是满射;

5). 利用 2.3.4. 证明可数个可数集的并仍为可数集。