

线性代数作业四

教师：李子明；助教：薛威、张晓晶。

1. 求置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ 的阶数，一种循环分解和置换符号
2. 设 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^+$, 记 g 为它们的最大公因数，用数学归纳法证明存在 $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$ 使得 $g = \sum_{i=1}^n a_i b_i$
3. 利用欧几里得算法计算 238 和 123 的最大公因数和最小公倍数，并给出一组整数 (u, v) , 使得 $238u + 123v = \gcd(238, 123)$
(下面一道题为思考题，难度较大，大家视自己情况来做)
4. (这道题的背景是为了证明 $A_n (n \neq 4)$ 是单群，但介于群定义很多人没学过，就把证明过程中的一些小结论列出来，有兴趣的同学可以想一想如何用这些小结论去证明 A_n 是单群)
定义：
1. 我们把 S_n 的所有偶置换子集记为 A_n
2. 一个 S_n 的子集 A 能被若干 S_n 中的元素 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ 生成是指 A 中所有元素都能写成 $\sigma_{i_1}^{k_1} \sigma_{i_2}^{k_2} \dots \sigma_{i_r}^{k_r}$ 这样子
证明：
(1) 如果 $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_r) \in S_n$, 并且 $\tau \in S_n$, 那么 $\tau \sigma \tau^{-1} = (\tau(i_1) \tau(i_2) \dots \tau(i_r))$
(2) S_n 可由 $(12), (13), \dots, (1n)$ 生成
(3) S_n 可由 $(12), (23), \dots, (n-1n)$ 生成
(4) 利用 (1)(2)(3) 说明 S_n 可由 $(12), (123), \dots, (123 \dots n)$ 生成
(5) 设 r, s 为 $1, 2, 3, \dots, n$ 中两个不同元素, $n \geq 3$, 说明 A_n 可以由 $\{(rsk) | 1 \leq k \leq n, k \neq r, s\}$ 生成
(6) 设 N 是 $A_n (n \geq 3)$ 的一个子集生成的集合并且满足任取 A_n 中一个元素 σ , N 的一个元素 τ , 都有 $\sigma \tau \sigma^{-1} \in N$ (以后我们称这样的子集为正规子群), 那么如果 N 包含一个长度为 3 的循环, 试说明 $N = A_n$