

线性代数作业五

教师：李子明；助教：薛威、张晓晶。

1. 计算线性组合 $2x_1 + 5x_2 - 3x_3$ ，其中

$$x_1 = (3, 1, 2, -2), x_2 = (1, 4, -3, 5), x_3 = (7, 4, 1, -9).$$

2. 判断下列向量组是否线性无关

1) $x_1 = (1, 2, 3), x_2 = (2, -1, 3);$

2) $x_1 = (2, 3, -1), x_2 = (3, 5, 2), x_3 = (-2, 4, 1);$

3) $x_1 = (4, -5, 2, 6), x_2 = (2, -2, 1, 3), x_3 = (6, -3, 3, 9);$

4) $x_1 = (4, -5, 2, 6), x_2 = (2, -2, 1, 3), x_3 = (5, -3, 3, 9), x_4 = (4, -1, 5, 6), x_5 = (3, 2, -1, 7).$

3. 求 λ 使得向量 $(7, -2, \lambda)$ 是向量 $(2, 3, 5), (3, 7, 8), (1, -6, 1)$ 的线性组合。

4. 求证

1) x_1, x_2 是 \mathbb{R}^n 的线性无关组当且仅当 $x_1 - x_2, x_1 + x_2$ 是 \mathbb{R}^n 的线性无关组。

2) x_1, \dots, x_n 是 \mathbb{R}^m 的线性无关组当且仅当 $x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n + x_1$ 是 \mathbb{R}^m 的线性无关组。

5. 求以下矩阵的所有行向量的极大线性无关组，以及所有列向量的极大线性无关组，

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

6. 将2. 4)题中的 x_1 扩充成 x_1, x_2, \dots, x_5 的极大线性无关组。

7. (思考题) 设 $\vec{e}^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $j = 1, \dots, n$ ，其中第 j 行的数为实数 1，是 \mathbb{C}^n 的一组极大线性无关组，求

证在以实数为标量的向量空间中 $\vec{e}^{(1)}, \dots, \vec{e}^{(n)}, i\vec{e}^{(1)}, \dots, i\vec{e}^{(n)}$ 是 \mathbb{C}^n 的一组极大线性无关组。并思考此时为什么与命题:若 T_1, T_2 是某向量空间的两个极大线性无关组，则 $|T_1| = |T_2|$. 相悖?