线性代数作业六

教师：李子明；助教：薛威、张晓晶。

1. 设 U,V,W 为 R^n 的子空间

证明

$(U+V)\cap W \supseteq U\cap W + V\cap W$

$(U\cap V)+W \subseteq (U+W)\cap(V+W)$

并举四个分别对应取等号，严格包含的例子

2. 设向量组 S 生成子空间 $V=<S>\subseteq R^n$, dim V=d, 若 S 有一个子集 $S_0=\{v_1,v_2,....v_t\}$ 满足 $<v_1,v_2,....v_t>=V$

证明 $t\geq d$. 并以此说明若 $t=d$，则 $v_1,v_2,....v_t$ 线性无关

3. 计算题

(1) 在 R^4 中, $V_1=<\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3>$,$V_2=<\beta_1,\beta_2>$

其中 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$,$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$,$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\3\\2\\1\end{pmatrix}$,$\beta_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$,$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\7\end{pmatrix}$

计算 $V_1+V_2,V_1\cap V_2$ 的维数并给出一组基

(2) 在 R^4 中, $V_1=<\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3>$,$V_2=<\beta_1,\beta_2,\beta_3>$

其中 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$,$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\3\end{pmatrix}$,$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix}$,$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-6\end{pmatrix}$,$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\4\end{pmatrix}$,$\beta_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-5\end{pmatrix}$

计算 $V_1+V_2,V_1\cap V_2$ 的维数并给出一组基

4*. (思考题！这道题的背景是为了证明有限个真子空间无法覆盖全空间)

命题：设 $\{V_i\}_{i=1}^m$ 为 R^n 的真子空间 (也就是不等于 R^n 的子空间), 那么 $V_1\cup V_2....\cup V_m\neq R^n$

证明：

(1) 说明 m=2 的时候命题的正确性

(2) 假设 m=s-1 的时候命题正确，若 $V_1\cup....\cup V_{s-1}\cup V_s=R^n$ 能推出 $V_s=R^n$, 那么 m=s 的时候命题也正确

(3) 假设 m=s-1 的时候命题正确，但在 m=s 的时候命题不正确，即存在这样的真子空间组 $\{V_i\}_{i=1}^s$ 满足 $V_1\cup V_2....\cup V_{s-1}\neq R^n,V_s\neq R^n$ 但是 $V_1\cup V_2....\cup V_s=R^n$,

说明此时存在向量 $\alpha\in V_s,\beta\notin V_s$ 使得 $\alpha\notin V_1\cup V_2....\cup V_{s-1},\beta\in V_1\cup V_2....\cup V_{s-1}$

(4) 对于 (3) 中的向量 α,β, 考察集合 $W=\{k\alpha+\beta|k\in R\}$

证明 $\forall k\in R,k\alpha+\beta\notin V_s$

$\exists k_0\in R,k_0\alpha+\beta\notin V_1\cup V_2....\cup V_{s-1}$

(5) 利用 (4) 推出矛盾，从而证明了 m=s 的时候命题是正确的

(6)* 将指标集换成自然数集 N，命题是否仍成立，即可数个真子空间是否能覆盖全空间？