线性代数作业七

教师：李子明；助教：薛威、张晓晶。

1. 求矩阵的秩。《基础代数》席南华。Page.51,第二题(1)、(4);Page.52,第三题。

2. 证明下列映射是线性映射，并求它们在标准基下对应的矩阵，以及它们的核的一组基和像空间的一组基，

1) $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, \forall\ \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n, \varphi(\vec{x})=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$。

2) $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4, \forall\ \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3, \varphi(\vec{x})=\begin{pmatrix}x_1+x_2+2x_3\\x_2+x_3\\3x_1-x_2+2x_3\\5x_1-4x_2+1x_3\end{pmatrix}$。

3. 映射 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 设矩阵 A 就是 φ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的标准基下的矩阵表示, 求证：

1) φ 是单射，当且仅当 A 是列满秩；

2) φ 是满射，当且仅当 A 是行满秩。

4. 设映射 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m:\vec{x}\mapsto\begin{pmatrix}f_1(\vec{x})\\f_2(\vec{x})\\\vdots\\f_m(\vec{x})\end{pmatrix}$。求证: φ 是线性映射 $\Longleftrightarrow$ $f_1,f_2,\ldots,f_m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上的线性函数。