线性代数作业十

教师：李子明；助教：薛威、张晓晶。

1. 判断下列矩阵是否存在左逆，若有请写出他的某个左逆，若无，请说明理由

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & -2 & -3 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & a \\ 1 & 2 & 2 & b \\ 2 & -2 & 1 & c \end{pmatrix}$

2*. A,B 为 n 阶方阵，且 AB=BA，从线性映射角度或者矩阵分块角度证明 $r(AB)+r(A+B)\leq r(A)+r(B)$

3. 用矩阵分块证明下面的问题

设 $A\in R^{m\times n}, B\in R^{n\times m}$

(1) $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ 秩相同，并且存在可逆矩阵 S，使得 $S\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}S^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$

(2) 利用 (1) 证明 $r((tI_m-AB)^k)=r((tI_n-BA)^k)+m-n$ 对于任意非零实数 t 都成立

4*. (思考题，背景就是广义逆的一种解的形式，一般称为 Drazin inverse) 对于不可逆方阵 A，AXA=A 矩阵方程仍然有解 X，这样的矩阵解称为 A 的广义逆 (当然 A 如果可逆的话 X 唯一且恰好为 A 的逆)，在实际计算中，我们发现有一类特殊的广义逆有着很重要的作用，他们就是 Drazin inverse，并且在某种意义下唯一，这道题就来说明这一点。

设 $A=S\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}S^{-1}$, 其中 B 为可逆方阵，N 为幂零方阵 (以后我们会证明任意方阵都有这样的分解称为 Jordan 分解)

(1) 证明对于这样的 A，AXA=A 有解 X=$S\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}S^{-1}$

(2) 设 q 为 N 的阶数，即 $N^q=0, N^{q-1}\neq 0$, 证明上述 A,X 满足以下矩阵等式

$AX=XA, XAX=X, A^{q+1}X=A^q$

(3) 反过来我们称满足矩阵方程

$AX=XA, XAX=X, A^{q+1}X=A^q, AXA=A$ 的 X 为 A 的 Drazin inverse

证明此时 X 一定等于 $S\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}S^{-1}$