线性代数作业十一

教师：李子明；助教：薛威、张晓晶。

1. 借助初等变换计算行列式。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -n+1 & 0 \end{vmatrix}$

2. 不展开行列式而证明下列等式。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

3. 设 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 是 n 阶方阵。在下述情况下比较 $detA$ 和 $detB$.

(1) $b_{ij}=2^{j-i}a_{ij}$; (2) $b_{ij}=a_{n+1-i,j}$; (3) $b_{ij}=a_{n+1-i,n+1-j}$

4. 设 $A=(a_{ij})$ 是实数矩阵，证明：

(1) 如果 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$, $i=1,2,\ldots,n$, 那么 $det(A)\neq 0$;

(2) 如果 $a_{ii}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$, $i=1,2,\ldots,n$, 那么 $det(A)>0$。

5.、6. 《代数学引论（柯斯特利金）》 Page102，第6题、第8题。

7.(思考题) 两个向量 $\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}$ 的内积的定义是 $\alpha\cdot\beta:=\sum_{i=1}^n\alpha_i\beta_i$，有时也写作 $(\alpha\,|\,\beta)$。向量的长度(模或者二范数) $\|\alpha\|$的定义是 $\sqrt{\alpha\cdot\alpha}$ 或者 $\sqrt{(\alpha\,|\,\alpha)}$。

(1) 设 $\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 空间中的两个向量，表示关于 $\mathbb{R}^2$ 空间中的标准基 e_1, e_2 下的坐标，θ 是 α, β 在平面直角坐标系下的夹角，证明 $\alpha\cdot\beta=\|\alpha\|\|\beta\|\sin\theta$。

(2) 证明(1)中 $(det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix})^2=\|\alpha\|^2\|\beta\|^2-(\alpha\,|\,\beta)^2$，从而 $(det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix})^2=\|\alpha\|^2\|\beta\|^2\cos^2\theta$。

(3) α_1,α_2, β 在 $\mathbb{R}^n$ 中，证明 $(\alpha_1-\alpha_2\,|\,\beta)=(\alpha_1\,|\,\beta)-(\alpha_2\,|\,\beta)$。

(4) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \alpha_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中，令 $B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{n,n-1} \end{pmatrix}$，证明 α_n 在由 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ 形成的超平面上的投影向量是 $B(B^T B)^{-1} B\, \alpha_n$。(根据解空间与行空间正交，则与超平面正交的向量在超平面的解集中)

(5) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 空间中的三个向量，证明 $det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{31} & \cdots & \alpha_{33} \end{pmatrix}$ 是由向量 α_1, α_2, α_3 为棱形成的平行六面体的体积。