线性代数作业十

教师：李子明；助教：薛威、张晓晶。

1. 计算题

(1) 试问下面这个线性方程组何时有解，在有解的情形下是不是唯一解

$$\begin{cases} 3x+5y-z-2w=2 \\ x-5y+2z+w=-1 \\ 2x+6y-3z-3w=a+1 \\ -x-11y+5z+4w=-4 \end{cases}$$

(2) 试问下面这个线性方程组何时有解，何时有唯一解，何时有无穷多组解，何时无解

$$\begin{cases} ax+y+z=2 \\ x+by+z=1 \\ x+2by+z=1 \end{cases}$$

2. 讨论 n 阶方阵 A 的伴随矩阵 $A^\vee$ 的秩的可能性并且给出取到这些可能性的 A 的充分必要条件

3. 利用矩阵的秩和子式之间的关系证明斜对称矩阵的秩一定是偶数

4*. (思考题，背景就是利用伴随映射的连续性来研究伴随矩阵的性质)

定义：伴随映射是指 $M_n(R) \to M_n(R)$ 的映射：A 映到 $A^\vee$, 而伴随映射的连续性是说，对于任意矩阵序列 $\{A_n\}_{n\in N}$ 收敛到 A，那么这个矩阵序列在伴随映射下的像收敛到 $A^\vee$。（注：矩阵序列 $\{A_n\}_{n\in N}$ 收敛到 A 是指每一个位置的元素都收敛到 A 的对应位置的元素）

而利用矩阵的子式的性质以及行列式函数的连续性可以知道伴随映射是连续的。下面就利用这个连续性来推广一些之前熟知的结论。

(1) 对于可逆 n 阶矩阵 A，B，我们有 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 从而能够推出 $(AB)^\vee=B^\vee A^\vee$, 证明 $(AB)^\vee=B^\vee A^\vee$ 对于任意 n 阶矩阵 A，B 都成立

(2) 对于可逆矩阵 A，A 和 B 交换能立刻得到 $A^\vee$ 和 B 交换，证明对于任意矩阵 A 上述结论仍正确

(3) 证明对于任意矩阵 A，$(A^t)^\vee=(A^\vee)^t$

(4) 证明对于任意矩阵 A，$det(A+xy^t)=detA+y^tA^\vee x$

(提示：3 和 4 的证法和 1，2 类似，先对可逆矩阵证明再用连续性证明对于任意矩阵都成立)