线性代数作业十二

教师：李子明；助教：薛威、张晓晶。

1. 计算题

在 Z_5 这个域上考虑下列问题

(1) 设 A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

计算 V_A 的维数并给出一组基

(2) 设 $V_1 =< \alpha_1, \alpha_2 >, V_2 =< \beta_1, \beta_2, \beta_3 >$

其中 $\alpha_1 = (1,2,4,2,1)^T, \alpha_2 = (2,3,1,0,2)^T, \beta_1 = (2,0,1,2,4)^T, \beta_2 = (1,3,3,2,0)^T, \beta_3 = (2,2,1,0,4)^T$

计算 $V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$ 的维数并给出一组基

(3) 试问下面这个线性方程组何时有解，何时有唯一解，何时有无穷多组解，何时无解

$$\begin{cases} ax + y + z = 2 \\ x + by + z = 1 \\ x + 2by + z = 1 \end{cases}$$

2. 代数学引论科斯特利金 P_{142} 10,11 题

3. 证明有限整环一定是域，并 * 查阅相关资料，了解有限除环一定是域的事实

4*. (思考题，背景就是利用群在集合上的作用研究群内元素的阶数)

最终目标：(柯西定理) 若群 G 的阶数被 p 素数整除，那么 G 中一定存在阶数为 p 的元素。

定义：

群 G 在集合 X 上的作用是指集合族 $\{L_g : X \to X\}_{g \in G}$

其中 L_g 满足 1. 为 X 到自身的双射 2.$L_g \circ L_{g'} = L_{gg'} \forall g, g' \in G$

群 G 在集合 X 上的作用的不动点是指集合 $\{x \in X | L_g(x) = x\}$

(1) 回顾之前 G 为偶数阶群那么一定有非平凡的二阶元的题目的证明

证明下述集合族为 Z_2 在集合 X=$\{(a,b) | ab = e, a, b \in G\}$ 上的作用:

$\{L_1 : X \to X | L_1(a,b) = (b,a)\} \cup \{L_0 : X \to X | L_0(a,b) = (a,b)\}$

(2) 求上述群在集合上的作用的不动点

(3) 若 $|G| = 2n$，说明此时不动点的个数也为偶数，进而证明了存在非平凡的二阶元

(4) 仿照上述构造，试着构造 Z_p 在集合 X=$\{(a_1, a_2, ..., a_p) | a_1 a_2 ... a_p = e, a_i \in G, \forall i = 1, 2...p\}$ 上的作用

(5) 假设我们承认对于任意 Z_p 在集合 X 上的作用，不动点的个数和 X 的个数模 p 同余 (这个利用“轨道公式”立刻可以看出)，利用之前的提示来证明柯西定理