线性代数作业十三

教师：李子明；助教：薛威、张晓晶。

1.《代数学引论（第一卷）》柯斯特利金 Page.161 第1题。

2. 设多项式 $f_1(x)=(x-1)(x-2); f_2(x)=(x-1)^2(x-2); f_3(x)=(x-1)^3; f_4(x)=(x-1)^2$，矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，分别求出 $f_1(A), f_2(A), f_3(A), f_2(B), f_3(B), f_4(B)$。

3. 计算 $f(x)=x^4-3x^3-3x^2+11x-6$ 与 $g(x)=x^4-2x^3-4x^2+2x+3$ 在 $\mathbb{Z}_2$ 和 $\mathbb{Z}_5$ 上的最大公因子，并以此推测在 $\mathbb{Z}$ 上的最大公因子。(可能用到中国剩余定理)

4. F 是一个域，$F[x]$ 是以 x 为未定元的 F 上的一元多项式环，$f(x), g(x)\in F[x]$, 证明

$$\{p(x)f(x)+q(x)g(x)\mid \forall\, p(x), q(x)\in F[x]\}=\{n(x)gcd(f(x),g(x))\mid \forall\, n(x)\in F[x]\}.$$

5. (思考题)本题主要是4.题中的结论在多元多项式中的推广。（Hilbert 基定理）证明：$\mathbb{C}[x_1,x_2,...,x_n]$ 是负数域 $\mathbb{C}$ 上的全体 n 元多项式，$\mathbb{C}[x_1,x_2,...,x_n]$ 中的任何理想都是有限生成的。（其中环中的理想（ideal）是指: 设 $I\subset R$ 是环 R 的一个加法子群。如果对于任意的 $r\in R,\ a\in I$ 都有 $ra\in I,\ ar\in I$，那么 I 称为 R 的一个理想。说 I 是由 $f_1,...,f_n$ 生成的，如果 $I=\{g_1f_1+...+g_nf_n\mid \forall\, g_1,...,g_n\in R\}$，写作 $I=\langle f_1,...,f_n\rangle$。）

(1) 证明：存在 $p_1,...,p_n\in\mathbb{C}[x_1,x_2,...,x_n]$ 使得对任意的 $f(x_1,...,x_n)\in\mathbb{C}[x_1,x_2,...,x_n]$，都有

$$f=\sum_{i=1}^{n}p_if_i+r(x_1,...,x_n)$$

其中 $r(x_1,...,x_n)$ 满足对每个 f_i ，按照字典序， r 的首项不是 f_i 的首项的倍式。（两个单项式 $m=\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, n=\prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}$,称 m 是 n 的倍式，如果 $\forall\, i=1,...,n,\ \beta_i\le\alpha_i$）

(2) 证明：I 是 $\mathbb{C}[x_1,x_2,...,x_n]$ 的理想，a 的首项表示为 $lt(a)$, $\{lt(a)\mid\forall a\in I\}$ 是有限集 X 的倍式（可直接运用Dickson引理）。

(3) 证明：取 $G=\{g\in I\,|\,lt(g)\in X\}\subset I$ 使得 $\{lt(g)\}=X$，则 $I=\langle G\rangle$。