线性代数作业十四

教师：李子明；助教：薛威、张晓晶。

1. 计算题

在 Q 上考虑以下问题

(1)$x^5-12x^3+36x-12$ 是否是不可约多项式

(2)$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)+1$ 是否是不可约多项式

(3) 求 $x^6+x^4+x^3+x^2+x+1$ 和 $x^5+2x^3+x^2+x+1$ 的最大公因子

(4) 判断 $Z[\sqrt{-3}]$ 是否是 UFD

2. 代数学引论科斯特利金 P_{172} 6 题

(这题告诉了我们幂级数环能够继承多项式环的 UFD 性，本质原因在于这种信息在完备化下是不改变的,)

3. 代数学引论科斯特利金 P_{172} 5 题

(这题以后还会用到，用于研究 $C[X,Y]$ 的齐次元素的因式分解，从而告诉我们很多复数域上的射影平面中的曲线信息)

4*. (思考题，背景就是探讨 UFD 和整闭的关系以及 R[X] 的整闭继承问题)

最终目标：若 R 为整闭整环，则 R[X] 也是整闭整环，特别地，R 是 UFD 的时候，R[X] 是整闭的。

定义：

整元：R 为整环，K 为其分式域, 若 $u\in K$，且存在 R[X] 中的首一多项式 f，使得 f(u)=0, 那么我们称 u 为 R 上的整元，或者 u 在 R 上整

完全整元:：R 为整环，K 为其分式域, 若 $u\in K$，且存在 $a\in R$ 使得 $au^n\in R$ 对于任意正整数 n 都成立, 那么我们称 u 为 R 上的完全整元，或者 u 在 R 上完全整

整闭整环：R 是整环，R 的分式域记为 K，若任取 $u\in K$ ，只要 u 在 R 上整，那么 $u\in R$, 满足以上条件的 R 我们称为整闭整环

完全整闭整环：R 是整环，R 的分式域记为 K，若任取 $u\in K$，只要 u 在 R 上完全整，那么 $u\in A$, 满足以上条件的整环称为完全整闭整环

(1) 证明若 R 是 UFD，那么他一定是整闭整环

(2) 证明若 R 是 UFD，那么他一定是完全整闭整环

(3) 假设 R 是整环，分式域记为 K，任取 $u\in K$, 证明若 u 在 R 上整，那么 u 在 R 上完全整，并利用这个命题说明完全整闭整环一定是整闭整环

(4) 假设 R 是整闭整环，分式域记为 K，我们知道 R[X] 的分式域为 K(X)，任取 $u=\frac{P(X)}{Q(X)}\in K(X)$，假设存在 R[X] 上的的首一多项式 $f(Y)=a_0+a_1Y+...a_nY^n$，其中 $a_i\in R[X]$，使得 f(u)=0，利用 (1)(2)(3) 说明 $u\in K[X]$, 且系数在 R 上完全整。

(5) 接着 (4) 的推导，我们考察 R 的子环 R_0, 它由 $1,a_0,...a_n,P,Q$ 的系数生成，假设我们承认对于任意 $u\in K_0$，其中 K_0 为 R_0 的分式域，若 u 在 R_0 上完全整那么 u 一定在 R_0 上整（即 (3) 的逆命题对于 R_0 这样的环成立）, 以此说明 (4) 中的 u 其实系数在 R 上还是整的, 从而根据 R 的整闭性可以知道 $u\in R[X]$, 进而证明了我们的最终目标。