

第一周习题

1. 设 $p = (x - y)(x - z) + 3x^2y^2z^2 - x^3 - 2 \in \mathbb{Z}[x, y, z]$.
 - (i) 计算 p 的齐次分解.
 - (ii) 计算 $\deg_x(p)$, $\deg_y(p)$, $\deg_z(p)$ 和 $\deg(p)$.
2. 求 $\mathbb{Q}[x]$ 中次数小于 3 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $f(3) = 0$.
3. 设 $f = x^3 - 3x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$. 求 f 的无平方部分.
4. 设 $A \in M_n(F)$, 其中 F 是域. 方阵 A 的迹记为 $\text{tr}(A)$. 令 $f(t) = \det(tE - A) \in F[t]$.
 - (i) 证明: $\deg_t(f) = n$.
 - (ii) 证明: f 中关于 t^{n-1} 的系数等于 $-\text{tr}(A)$.
 - (iii) 设: f 在 F 中有 n 个根 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. 证明: $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \text{tr}(A)$.
5. 设 F 是域, $h \in F[x_1, \dots, x_n] \setminus F$ 是齐次的多项式. 证明: h 在 $F[x_1, \dots, x_n]$ 中的因子都是齐次的.
6. (选做) 如何计算 $p \in \mathbb{Q}[x]$ 的不可约单因子之积? (单因子是指重数等于 1 的因子).