# 第二周习题

1. 回答下列问题并简要说明理由.

   (i) 设 $d \in \mathbb{N}$ 且 $U_d = \{f \in \mathbb{Q}[x] \,|\, f$ 中关于 $x^d$ 的系数等于零$\}$. 问 $U_d$ 是不是 $\mathbb{Q}[x]$ 的子空间?

   (ii) 设 $V_1 = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{rank}(A) \le 1\}$. 哪些正整数 $n$ 可使 $V_1$ 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 的子空间?

   (iii) 设 $c \in \mathbb{R}$, $V_c = \{f \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, f(0) = c\}$. 问 $c$ 取何值是 $V_c$ 是 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 的子空间?

2. 设 $F$ 是域. 令

   - $\mathrm{SM}_n(F) = \{A \in \mathrm{M}_n(F) \,|\, A = A^t\}$ (对称矩阵构成的子空间),
   - $\mathrm{UT}_n(F) = \{A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(F) \,|$ 当 $i \ge j$ 时, $a_{i,j} = 0\}$ (严格上三角矩阵构成的子空间).
   - $\mathrm{LT}_n(F) = \{A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(F) \,|$ 当 $i \le j$ 时, $a_{i,j} = 0\}$ (严格下三角矩阵构成的子空间).
   - $\mathrm{Diag}_n(F) = \{A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(F) \,|$当 $i \ne j$ 时, $a_{i,j} = 0\}$ (对角矩阵构成的子空间).

   证明: $\mathrm{M}_n(F) = \mathrm{SM}_n(F) \oplus \mathrm{UT}_n(F) = \mathrm{UT}_n(F) \oplus \mathrm{Diag}_n(F) \oplus \mathrm{LT}_n(F)$.

3. 判断下列 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ 中的元素在 $\mathbb{R}$ 上是否线性相关并说明理由.

   (i) $\sin(x), \cos(x)$;

   (ii) $x^2 + k$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

   (iii) $1/(x + k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

4. 定义差分算子:

$$
\begin{array}{rccc}
\Delta: & \mathbb{C}[x] & \longrightarrow & \mathbb{C}[x] \\
 & f(x) & \mapsto & f(x+1) - f(x)
\end{array}
$$

   (i) 验证 $\Delta$ 是从 $\mathbb{C}$ 上线性空间 $\mathbb{C}[x]$ 到自身的线性映射.

   (ii) 设 $p_n = x(x+1)\cdots(x+n)$, $n \in \mathbb{N}$. 计算 $\Delta(p_n)$.

   (iii) 确定 $\ker(\Delta)$ 和 $\mathrm{im}(\Delta)$.

5. (选做) 设 $V$ 是域 $F$ 上的线性空间. 证明: 当 $F$ 的特征等于零时, $V$ 不可能是有限多个真子空间的并(见上学期习题六的提示). 举例说明当 $F$ 的特征为正时, 上述结论一般不成立.