第三周习题

1. 设 $\mathbb{Q}^3$ 中的三个向量

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

计算 $V := \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ 的一组基 和 $\mathbb{Q}^3/V$ 的一组基.

2. 设

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ & f(x) & \mapsto & f'(x) \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ & f(x) & \mapsto & xf(x). \end{array}$$

验证 ϕ 和 ψ 都是线性映射. 对任意的 $f \in \mathbb{R}[x]$, 计算 $(\phi \circ \psi - \psi \circ \phi)(f)$.

3. 把复数域 $\mathbb{C}$ 看成有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间. 设

$$U = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \quad \text{和} \quad V = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

(i) 验证 U 和 V 是 $\mathbb{C}$ 的子空间.

(ii) 分别计算 U 和 V 的一组基底.

(iii) 计算 $\dim_{\mathbb{Q}}(U + V)$.

4. 设 p 是素数, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Z}_p$, 不全为零, V 是 $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ 在 $\mathbb{Z}_p^n$ 中的解空间. 计算 $\dim(V)$ 和 $\mathrm{card}(V)$.

5. 在矩阵空间 $\mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ 中. 设 $\mathrm{Mag}_2(\mathbb{Q})$ 是二阶幻方构成的子空间, U 和 V 分别是由

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

生成的子空间. 计算 $\dim(\mathrm{Mag}_2(\mathbb{Q}))$ 并确定 $\mathrm{Mag}_2(\mathbb{Q}) + U + V$ 是不是直和.

6. (选做) 设 V 是域 F 上的 n 维子空间, $V_1, \ldots, V_k$ 是 V 的子空间. 证明: 如果

$$\dim V_1 + \cdots + \dim V_k > n(k-1),$$

则 $V_1 \cap \cdots \cap V_k \neq \{\mathbf{0}\}$.

提示: 证明存在 $k-1$ 个子空间 $W_1, \ldots, W_{k-1} \subset V$ 使得

$$\dim(V_1) + \cdots + \dim(V_{k-1}) + \dim(V_k) = \dim(W_1) + \cdots + \dim(W_{k-1}) + \dim(V_1 \cap \cdots \cap V_k).$$