第四周习题

1. 设 $\mathbb{R}^2$ 中的两组基底

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (i) 求 $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 使得 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)P$.

   (ii) 设

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

   计算 $\mathbf{w}$ 在上述两组基下的坐标.

2. 设 $p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x(x-1), \ldots, p_{n-1} = x(x-1)\cdots(x-n+2)$.

   (i) 证明: $p_0, \ldots, p_{n-1}$ 是 $\mathbb{Q}[x]^{(n)}$ 的一组基.

   (ii) 计算 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ 使得 $(p_0, p_1, p_2) = (1, x, x^2)P$.

   (iii) 计算 x^2 在 p_0, p_1, p_2 下的坐标.

3. 设 F 是域, $\mathrm{SSM}_n(F)$ 是 F 上所有 n 阶斜对称矩阵组成的子空间, T_0 是 F 上所有 n 阶迹为零的矩阵组成的子空间.

   (i) 求 $\dim(\mathrm{SSM}_n(F))$ 和 $\dim(T_0)$.

   (ii) 分别计算 $\mathrm{SSM}_n(F)$ 和 T_0 的一组基底.

4. 设 $f \in \mathrm{M}_n(F)^*$, $a_{i,j} = f(E_{i,j})$, 其中 $E_{i,j}$ 代表在 i 行 j 列处元素是 1, 而其它处元素都等于 0 的 n 阶方阵, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 设 $X = (x_{i,j})$ 是 $\mathrm{M}_n(F)$ 中的任意方阵.

   (i) 验证: $f(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_{i,j}$.

   (ii) 令 $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(F)$. 验证 $f(X) = \mathrm{tr}(A^t X)$.

   (iii) 设 $B \in \mathrm{M}_n(F)$ 使得 $f(X) = \mathrm{tr}(BX)$. 验证 $B = A^t$.

5. 设 V 是 F 上的有限维线性空间, $f, g \in V^* \setminus \{\mathbf{0}^*\}$. 证明: $\ker(f) = \ker(g)$ 当且仅当存在 $\lambda \in F$ 使得 $f = \lambda g$.

6. (选做) 设 V 是 F 上的 n 维线性空间, U 是 V 的 d 维子空间. 设

$$U^0 = \{f \in V^* \mid \forall\, \mathbf{u} \in U,\, f(\mathbf{u}) = 0\}.$$

   证明: $\dim(U^0) = n - d$.