第五周习题

1. 设 $\mathbb{R}^4$ 上的双线性型由公式 $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - 3x_2y_3 + 2x_4y_1 + 5x_3y_2 - x_4y_4$ 定义, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^t$. 求 f 在标准基下的矩阵和 $\mathrm{rank}(f)$.

2. 设
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
计算 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ 和对角矩阵 B 使得 $P^tAP = B$.

3. 设 F 是域, V 是域 F 上的 n 维线性空间. 设 $f, g \in V^* \setminus \{\mathbf{0}\}$, 而 $h : V \times V \longrightarrow F$ 由公式
$$\forall\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in V \times V,\ h(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})$$
定义. 验证 h 是双线性型并求 $\mathrm{rank}(h)$.

4. 设 F 是域, 其特征不等于 2, V 是域 F 上的 n 维线性空间

   (i) 设 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$. 证明: 如果对任意的 $\mathbf{x} \in V$, 我们都有 $f(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$, 则任意的 $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in V \times V$, $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$. *(提示: 利用极化公式或规范型)*

   (ii) 设 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$. 证明: 对任意的 $\mathbf{x} \in V$, $f(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$.

   (iii) 设 A 是 F 上 n 阶对称方阵. 证明: 如果对任意 $\mathbf{x} \in F^n$, 我们都有 $\mathbf{x}^tA\mathbf{x} = 0$, 则 A 是零方阵.

   (iv) 设 A 是 F 上 n 阶斜对称方阵. 证明: 对任意 $\mathbf{x} \in F^n$, 我们都有 $\mathbf{x}^tA\mathbf{x} = 0$.

5. (选做) 设 F 是域, V 是域 F 上的 n 维线性空间, $h \in \mathcal{L}_2(V)$ 且 $\mathrm{rank}(h) = 1$. 证明: 存在 $f, g \in V^*$, 使得对任意 $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in V \times V$, $h(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})$.