第六周习题

1. 设 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1x_2 + 3x_3x_2 + 12x_4x_3 - 2x_4^2$ 是 $\mathbb{Q}^4$ 上的二次型. 计算 q 在标准基下的矩阵和 $\mathrm{rank}(q)$.

2. 设 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的二次型. 计算 q 的一组规范基和在该基下的规范型.

3. 求 $\mathbb{R}^n$ 上二次型 $q(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n$ 的签名.

4. 设 p 和 q 是 $\mathbb{C}^n$ 上的两个二次型, 它们在标准基下的矩阵分别是 A 和 B. 证明 $A \sim_c B$ 当且仅当 $\mathrm{rank}(p) = \mathrm{rank}(q)$.

5. 设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 非零且齐二次. 证明 p 在 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 中可约当且仅当下列条件之一成立.

   (i) $\mathrm{rank}(p) = 1$;

   (ii) p 的签名是 $(1, 1)$.

6. (选做) 设 F 是特征不等于 2 的域, V 是 F 上的线性空间, $f_1, \ldots, f_k \in V^*$. 定义

$$\begin{array}{rccl} q: & V & \longrightarrow & F \\ & \mathbf{x} & \mapsto & f_1(\mathbf{x})^2 + \cdots + f_k(\mathbf{x})^2. \end{array}$$

   证明: q 是二次型且 $\mathrm{rank}(q) \leq \dim\langle f_1, \ldots, f_k \rangle$.