第七周习题

1. 设
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_2(\mathbb{R}).$$
计算 A 的各阶顺序主子式并判定 A 的类型(半正定、正定、半负定、负定、不定).

2. 找出所有的 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 使得矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mu \\ 1 & \mu & 1 \\ \mu & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
是正定的.

3. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 是半正定的.
   (i) 证明: $\det(A) \geq 0$
   (ii) 设 B 是 A 中 $i_1, \ldots, i_k$ 行 和 $i_1, \ldots, i_k$ 列构成的 k 阶子矩阵, 其中 $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. 证明: B 是半正定的.

4. 设 V 实数域上有限维线性空间, q 是 V 上二次型. 设存在 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 使得 $q(\mathbf{u}) > 0$ 和 $q(\mathbf{v}) < 0$. 证明: 存在 $\mathbf{w} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ 使得 $q(\mathbf{w}) = 0$, 且 q 是满射.

5. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 证明: 存在 $\delta > 0$ 使得当 $\epsilon \in (-\delta, \delta)$ 时, $E + \epsilon A$ 正定.