第八周习题

1. 设 $q = (x_1+x_2)^2 + 3(x_1-x_3)^2 + 2(2x_1+x_2-x_3)^2 + 5(3x_1+x_2-2x_3)^2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的二次型. 求 q 的签名.

2. 设
$$\begin{array}{cccc} q: & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & X & \mapsto & \mathrm{tr}(X^tX). \end{array}.$$
证明 q 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 上的二次型并求 q 的签名.

3. 设
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
证明
$$A \sim_c \begin{pmatrix} O & E_2 \\ -E_2 & O \end{pmatrix}.$$

4. 设 V 是 域 F 上的线性空间, $f \in \mathrm{Map}(V,V)$. 对任意 $k \in \mathbb{Z}^+$,
$$f^k := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k}.$$
设 $\phi_1, \ldots, \phi_k \in \mathrm{Map}(V,V)$ 满足
$$\forall\ i,j \in \{1,\ldots,k\}, i \neq j,\ \phi_i \circ \phi_j = \mathbf{0}^*,$$
其中 $\mathbf{0}^*$ 代表 $\mathrm{Map}(V,V)$ 中的零映射; 且满足
$$\forall\ i \in \{1,\ldots,k\}, i \neq j,\ \phi_i^2 = \phi_i.$$
验证对任意的 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in F$, $n \in \mathbb{Z}^+$,
$$(\alpha_1\phi_1 + \cdots + \alpha_k\phi_k)^n = \alpha_1^n\phi_1 + \cdots + \alpha_k^n\phi_k.$$
注: 满足习题假设中条件的 $\phi_1,\ldots,\phi_k$ 称为一个正交等方组.

5. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明对于任意 $m \in \mathbb{Z}$, A^m 正定.

6. (选做) 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明 $\det(A)$ 等于 A 的对角线上元素之积当且仅当 A 是对角阵.