第九周习题

符号约定. 设 F 是域, V 是 F 上的有限维线性空间.

1. 设 V 的一组基是 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, V 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 由 $\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathcal{A}(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ 给出.

   (i) 计算 $\operatorname{rank}(\mathcal{A})$.

   (ii) 验证 $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ 是 V 的一组基, 并求 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 下的矩阵.

2. 设 $\mathcal{A} : \mathbb{R}[x]_n \longrightarrow \mathbb{R}[x]_n$ 由公式 $\mathcal{A}(p) = xp'$ 给出. 计算 ϕ 在 $1, x, \ldots, x^{n-1}$ 下的矩阵和 $\operatorname{rank}(\mathcal{A})$.

3. 设 $C \in \mathrm{GL}_n(F)$, $\mathcal{A} : \mathrm{M}_n(F) \longrightarrow \mathrm{M}_n(F)$ 由公式 $\mathcal{A}(X) = C^{-1}XC$ 给出.

   (i) 验证 $\mathcal{A}$ 是 $\mathrm{M}_n(F)$ 上的线性算子.

   (ii) 验证对任意 $X, Y \in \mathrm{M}_n(F)$, $\mathcal{A}(XY) = \mathcal{A}(X)\mathcal{A}(Y)$.

   (iii) 求 $\operatorname{rank}(\mathcal{A})$.

4. 设 k 阶方阵

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   计算 J_k^m, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

5. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$ 且 $A \sim_s B$.

   (i) 证明: A 幂零 $\Longrightarrow$ B 幂零; A 幂等 $\Longrightarrow$ B 幂等.

   (ii) 举例说明 A 对称不能推出 B 一定对称.

6. (选做) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$. 证明:

   (i) $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \operatorname{rank}(\mathcal{B}\mathcal{A}) + \dim(\operatorname{im}(\mathcal{A}) \cap \ker(\mathcal{B}))$.

   (ii) 对任意 $i \in \mathbb{Z}^+$, $\dim(\operatorname{im}(\mathcal{A}^{i-1}) \cap \ker(\mathcal{A})) = \dim(\ker(\mathcal{A}^i)) - \dim(\ker(\mathcal{A}^{i-1}))$.