第十周习题

约定. 在下述习题中 F 是域, V 是 F 上的有限维线性空间.

1. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} - \mathcal{E}$. 设 $f = t^3 - 1 \in F[t]$. 把 $f(\mathcal{A})$ 表示为 $\mathcal{E}, \mathcal{A}$ 在 F 上的线性组合.

2. 设

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}_{4\times 4}, \ B = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & E_2 \end{pmatrix}_{4\times 4}, \ C = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{4\times 4}.$$

   计算 μ_A, μ_B 和 μ_C.

3. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in F$. 证明:

   (i) $\mu_{\lambda\mathcal{E}-\mathcal{A}}(t) = \mu_{\mathcal{A}}(\lambda - t)$;

   (ii) 如果 U 是 $\mathcal{A}$-子空间, 则 U 也是 $(\lambda\mathcal{E} - \mathcal{A})$-子空间.

4. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 可逆, U 是 $\mathcal{A}$-子空间. 证明 U 是 $\mathcal{A}^{-1}$-子空间.

5. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}^2 = 2\mathcal{A} + 3\mathcal{E}$. 证明: 当 F 的特征不等于 2 时

$$\operatorname{rank}(\mathcal{A} + \mathcal{E}) + \operatorname{rank}(\mathcal{A} - 3\mathcal{E}) = \dim(V).$$

6. (选做) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 证明下列结论.

   (i) $\ker(\mathcal{A}^0) \subset \ker(\mathcal{A}) \subset \ker(\mathcal{A}^2) \subset \cdots$ 和 $\operatorname{im}(\mathcal{A}^0) \supset \operatorname{im}(\mathcal{A}) \supset \operatorname{im}(\mathcal{A}^2) \supset \cdots$.

   (ii) 存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $\ker(\mathcal{A}^k) = \ker(\mathcal{A}^{k+1})$. 此时对任意 $i \in \mathbb{N}$, 有

$$\ker(\mathcal{A}^k) = \ker(\mathcal{A}^{k+i}) \quad 和 \quad \operatorname{im}(\mathcal{A}^k) = \operatorname{im}(\mathcal{A}^{k+i}).$$

   (iii) 设 k 如 (ii) 所述. 则 $\ker(\mathcal{A}^k) \oplus \operatorname{im}(\mathcal{A}^k) = V$.