第十一周习题

约定. 在下述习题中 F 是域, V 是 F 上的有限维线性空间.

1. 求实矩阵
$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\quad \text{和} \quad B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$
的所有实特征根和对应的特征向量.

2. 设
$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1E_{k_1}&O&\cdots&O\\O&\lambda_2E_{k_2}&\cdots&O\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\O&O&\cdots&\lambda_sE_{k_s}\end{pmatrix},$$
其中 $\lambda_1,\dots,\lambda_s\in F$ 两两不同, $k_1,\dots,k_s\in\mathbb{Z}^+$. 计算 μ_A 和 χ_A.

3. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 可逆, $\mathbf{v}\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$. 证明:
   (i) $\mathbf{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量当且仅当 $\mathbf{v}$ 是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的特征向量;
   (ii) $\lambda\in F$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征根当且仅当 λ^{-1} 是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的特征根.

4. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $f\in F[t]$. 证明: 如果 $\lambda\in\operatorname{spec}_F(\mathcal{A})$, 则 $f(\lambda)\in\operatorname{spec}_F(f(\mathcal{A}))$.

5. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}^5-\mathcal{A}^3=3\mathcal{A}$. 证明: 当 F 的特征不等于 3 时, 证明:
$$\ker(\mathcal{A})\oplus\operatorname{im}(\mathcal{A})=V.$$

6. (选做) 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$.
   (i) 如果 V^λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征子空间, 则 V^λ 是 $\mathcal{B}$-不变的;
   (ii) 当 $F=\mathbb{C}$ 时, $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 有公共的特征向量.