第十二周习题

1. 设
$$A=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}.$$
计算 A^{100}.

2. 判断实矩阵
$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$$
是否可对角化. 如果可以, 求对角矩阵 B 使得 $A\sim_s B$.

3. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ 在标准基 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4$ 下的矩阵是
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$
计算循环子空间 $\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{e}_i$ 的维数, $i=1,2,3,4$.

4. 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 上的求导算子, $\mathcal{A}=x\mathcal{D}$, $\mathcal{B}=\mathcal{D}^2$. 判断 $\mathbb{R}[x]_n$ 是不是 $\mathcal{A}$-循环空间, 是不是 $\mathcal{B}$-循环空间. 如果是, 求一个循环向量.

5. 设:
$$C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$
   (i) 证明: C 可对角化.
   (ii) 设 $f\in\mathbb{C}[t]$. 求 $\det(f(C))$.

6. (选做) 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 满足 $A^k=A$, 其中 $k>1$. 证明:
   (i) A 可对角化;
   (ii) 如果 $k=2$, 则 $A\sim_s\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$ 且 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{rank}(A)$.