

## 第十三周习题

符号约定. 如果不加特殊声明,  $V$  是域  $F$  上的有限维线性空间.

1. 设  $a, b \in \mathbb{R}$  且  $b \neq 0$ ,  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[x]_3)$  由公式  $\forall f(x) \in \mathbb{R}[x]_3, \mathcal{A}(f(x)) = f(ax+b)$  定义.
  - (i) 计算  $\mathcal{A}$  的特征多项式;
  - (ii) 对  $a = 0, a = 1, a = -1$  和  $a \notin \{-1, 0, 1\}$ , 计算  $\text{spec}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ ;
  - (iii) 对上述  $a$  的取值讨论何时  $\mathcal{A}$  可以对角化.
  - (iv) 对上述  $a$  的取值讨论何时  $\mathbb{R}[x]_3$  是  $\mathcal{A}$  循环的.
2. 设  $A \in M_n(F)$  且  $p = \chi_A(t)$ . 设  $\phi \in \mathcal{L}(M_n(F))$  由公式  $\forall X \in M_n(F), \phi(X) = AX$  定义.
  - (i) 利用  $p$  表示  $\phi$  的特征多项式;
  - (ii)  $\text{spec}_F(\mathcal{A})$  和  $\text{spec}_F(\phi)$  之间的关系是什么?  
(提示: 参见第二章第一讲例 1.6.)
3. 设  $n = \dim(V)$ ,  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ . 证明: 如果  $\mathcal{A}^0, \mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}^{n-1}$  在  $F$  上线性无关, 则  $V$  是  $\mathcal{A}$ -循环的.
4. 设  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$  且  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ . 证明:  $\mathcal{A}$  的广义特征子空间是  $\mathcal{B}$ -不变的.
5. (选做) 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$  使得  $\ker(\mathcal{A}^\ell) = \ker(\mathcal{A}^{\ell+1})$ . 证明: 对于任意  $i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\ker(\mathcal{A}^\ell) = \ker(\mathcal{A}^{\ell+i})$ .