

第十四周习题

符号约定. 如果不加特殊声明, V 是域 F 上的有限维线性空间.

1. 设二阶复矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

计算 J_A , J_B 和 J_C .

2. 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & -1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

计算 A 的 Jordan 标准型 J_A .

3. 计算 $J_n(\lambda)^k$, 其中 $J_n(\lambda)$ 是关于 λ 的 n 阶 Jordan 块, $k \in \mathbb{N}$.
4. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, V 是 \mathcal{A} -循环的. 设 U_1, U_2 是正维数的 \mathcal{A} -子空间满足 $V = U_1 \oplus U_2$. 证明 \mathcal{A}_{U_1} 和 \mathcal{A}_{U_2} 的极小多项式互素.
5. (选做) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, V 是 \mathcal{A} -循环的. 设 $\lambda \in \text{spec}_F(\mathcal{A})$. 证明: $\dim(V^\lambda) = 1$.