

第十五周习题

符号约定. 如果不加特殊声明, V 是域 F 上的 n 线性空间, 其中 $n \in \mathbb{Z}^+$.

1. 已知 $\chi_A = (t-3)^4(t+2)$.

(i) 当 $\text{rank}(A-3E) = 2$ 时, 计算 J_A ;

(ii) 当 $\text{rank}(A-3E) = 1, 3$ 或 4 时, J_A 是唯一确定的吗?

2. 计算

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{C})$$

的 Jordan 标准型.

3. 设 n 是奇数. 计算

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

的 Jordan 标准型.

4. 设 n 是奇数. 计算 $J_n(0)^2$ 的 Jordan 标准型.

5. 设 $n > 1, k > 1$. 证明: 不存在 $X \in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $X^k = J_n(0)$.

6. (选做) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 证明: 若 \mathcal{A} 有 k -维不变子空间, 则它有 $(n-k)$ -维不变子空间.