第十六周习题

1. 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧式空间,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

计算 $\|\mathbf{v}_1\|$, $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 的夹角, $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_3$ 的夹角.

2. 设 $\mathbb{R}^3$ 是标准欧式空间,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

求 $\mathbb{R}^3$ 的一组单位正交基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 满足

$$\langle \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \epsilon_1 \rangle, \quad \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle, \quad \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle = \langle \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \rangle.$$

3. 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. 证明:

   (i) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$;

   (ii) 如果 $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$, 则 $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \perp (\mathbf{u}-\mathbf{v})$.

4. 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ 线性无关. 证明 Gram 矩阵 $\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ 是 k 阶正定的矩阵.

5. (选做) 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. 证明: 如果 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 两两的夹角都是 $\pi/3$, 则 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性无关.